

发现与发生

一场两千五百年的争论，问错在哪里

发现 = 发生 - 路径 - 土壤



土壤与路径 | 已被磨去

显露 | 本来就在那里

而它每被顺利接住一次，
下一次发生就更难被触发一分。

王德生 著

德麦国际出版社

发现与发生

——一场两千五百年的争论，问错在哪里

王德生 著

Claude 协撰 依《SDE 本体论入门》

德麦国际出版社

DEMAI INTERNATIONAL PRESS

出版信息

书名 发现与发生——一场两千五百年的争论，问错在哪里

英文书名 Discovery and Genesis: Where a 2,500-Year Debate Asked the Wrong Question

著者 王德生

协撰 Claude (Anthropic)

出版 德麦国际出版社 Demai International Press

出版地 新加坡／美国

版次 2026 年 8 月第一版第一次印刷

开本 16 开 170mm × 240mm · 版心 139mm × 210mm · 每行 39 字
· 每页 43 行

字数 约 16.0 万汉字

页数 正文 197 页 (印装 198 页, 含封面封底共 200 面)

专著编号 德麦国际专著 第 76 号

ISBN 979-8-90690-002-9 (EAN-13 9798906900029)

定价 US\$ 50.00

版权声明

本书文字与图表版权归著者所有。未经书面许可，不得以任何形式复制、转载或用于训练任何自动系统。

Copyright © 2026 Wang Desheng. All rights reserved. No part of this book may be reproduced, transmitted, or used to train any automated system without prior written permission.

人机协作声明

本书由一名人与一台机器合写。

三件事由著者承担：判断、边界、错误。机器参与了材料的整理、论证的展开与文字的成形；凡本书作出的判断、划出的边界、以及其中可能存在的错误，责任在著者一人。

本书对协作方式的自我要求有二。其一，凡关键的历史材料，尽量给出年代与人名以便读者核对；凡未能核到卷期页码者，附录五逐条标了级，不作笼统的核对声明。其二，凡本书的判断有可指认的先行者，一律在其出现处指名，不留到末章；本书与作者其他四处相关工作的分界，写在正文之前。

须特别写明的一处：本书由人机协作写成这件事，本身正是书中所论那道工序的一个当代样本——一台纯粹的发生装置（模型的每个参数都是数据与训练路径的沉积），其产出正在被大量登记为“发现”。本书用它，而不接受它的免检证；态度与本书对待书中三十余位思想家的态度相同。

关于本书的引用

引用本书时，请连同它的失败条件一并引用。

本书第三十三章给出三条撤稿级条件、六编各有编级可推翻条件、三十四章各有一节“一处对本书不利的读法”。按本书自己在编三第十六章立下的识别码：

凡引用本书的工序而说不出它在什么情况下无效者，所引用的已经不是本书。

母题

发现与发生不是两种对立的主张，是同一条发生链的两个时相：发生是链在跑，发现是链跑完并被磨平之后的样子。于是“数学对象是被发现的还是被发明的”这场两千五百年的争论，是一个由磨平这道工序本身制造出来的问题——它只在链已经跑完的地方才提得出来，而在那里，两个答案都对，也都没用。真正的问题在别处：那道磨平的工序每成功一次，就在接收者身上写下一条使下一次发生不再被触发的规则。

三个部件：

其一，发现不是发生的对立面，是它的一个时相。一个数学对象在历史上被造出来时，带着逼出它的困境（土壤）与走通它的曲折（路径）。进入课本时，这两样被磨掉，只剩一个光滑的显露被摆到起点。本书称这道工序为光滑化，并写成：发现 = 发生 - 路径 - 土壤。

其二，这道工序的产物是一份归属错觉，而争论争的正是这份错觉。来路被磨掉的东西当然显得“本来就在”。两千五百年里，一派据此说它先在（故被发现），另一派据此说它是人造的（故被发明）。双方看的是同一件已被磨平的产物，只是对它的出身给出相反的推测——而这件产物的形状，恰恰使这个推测不可能有结论。

其三，代价不在归属，在下一轮。磨平的产物可以被打包递送，且递送常常非常成功。但每一次成功的接收，都在接收者身上写下一条关于底盘的规则：这类对象无须改动我。这条规则一旦写下，后续的改写就不再被触发。于是——发现不是没有回写，它的回写恰恰用于关闭回写。本书称之为封写。

全书总路线 = 一个问题的一生：被提出（编一，先在被立为地基）→ 被反攻（编二，发生派六次进击，每次赢在局部输在整体）→ 被解剖（编三，工序被拆开，双方争的是什么才变得清楚）→ 被诊断（编四，工序的真代价不在归属而在下一轮）→ 被重审（编五，四组老对峙逐一改判）→ 被换掉（编六，不问归属问工序，给出解锁与去光滑化）。

可推翻条件（全书级，另见第三十四章）：若能指出一个成熟的、被广泛传授的知识对象，其历史来路完整保留在教学呈现之中（土壤与路径均未被磨去），而学习者仍系统性地表现出“它本来就在那里”的先在感，则本书母题的第二部件被推翻。若能指出一群从未接受过光滑化教学的学习者，其先在感指数与受教多年者无显著差异，则第三部件被推翻。

七条写作纪律

1. 每章落一张判断卡片（是判断不是描述），写进该章首节，并在附录汇总。
2. 不做思想史陈列。一个人进入本书的唯一理由，是他在“磨平”这道工序上做过一次可指认的操作——写不出这一句的不进，无论他多重要。
3. 每编末尾必须回到母题，写清派生路径；不派生的删掉，不硬凑。
4. 编一至编五保持哲学与数学的母语，术语克制；编六是工序编，可放开。全书 S 一律称显露，不用“结构—差异—纠缠”旧称，不用“真”作强调词。
5. 全书三十四章，每一章都设一节「一处对本书不利的读法」——把针对本章的最强反读完整写出，再给应答或让步。凡本书在某一章找不到一条像样的反读，那一章的判断即应视为尚未站稳；凡反读击中之处，正文当场修正，不留到末章。
6. 编一至编四每章另设一节加厚层。编一编二是原始文本细读（取一段原文逐层看，使这两编成为证据而非综述）；编三是一处可核对的证据（凡本编的判断，须给出一件读者可以自己重做的核对）；编四是一处课堂实录（本编的机制看不见，故须给可以看见的东西）。
7. 本书自身接受同一把刀：末章必须写出本书的可推翻条件，且必须正面处理一处对自己最不利的反问——若“先在感是被造出来的”这一判断本身也是被某种传递史造出来的，本书凭什么例外。

与作者其他四处相关工作的分界

其一，与《课堂学习发生学》（专著第 55 号）。那一册处理一节课的账本：课堂里决定后果的东西是课堂自己造出来的，而账本只为“不是它造的”那些东西设了字段。它的尺度是一节课到一学期，落点是六个读数与一份采集方案。本书处理的是一件知识跨越人与人、代与代时的形状变化，尺度是两千五百年，落点是一道工序与它的逆运算。两册可互引，但判定形式不同：那一册问“这一栏为什么是空的”，本书问“这件东西为什么显得本来就在”。

其二，与《SDE 教育发生学导论》（专著第 47 号）。那一册在纲领层，本书在争论层——本书的全部工作是重审一场具体的、有文献可查的历史争论，并指出它问错在哪里。纲领层的命题在本书中只作工具，不作结论。

其三，与作者的哲学史总纲《西方哲学 2500 年：发生对发现的否定序列》。这一处分界最要紧，因为它与本书的重叠最深。那篇十万字的总纲把西方哲学史读成一台三冲程的机器——发现宣称、解构显形、偷运新磐石——并从苏格拉底到梅亚苏逐一检视三十环。本书编二那条承重判断，就是它的第三冲程；那篇处理三十环，本书只有六位。导论第五节完整交代这一分工，编二编末再交代一次。要点只有一条：那篇处理的是上游的传递（一块磐石如何被立起、被拆开、被换成新的，而这全部发生在专业哲学家之间）；本书处理的是下游的接收（这件已经磨光的东西被交到一个还没有它的人手里之后，那个人身上发生了什么）。那篇文章里没有有一个学生。

其四，与讲座《教育：从发现到发生的革命》。那是一次面向小学教师的四十五分钟入门，处理传道模式的八环链与它的八处裂缝，是本书编六的一个通俗前身。讲座里那三节自我定位（若被读成“让学生自己发现新结构”，则 Kirschner-Sweller-Clark 2006 的批评一字不差适用；本书主张的次序是学习者先撞到旧办法的边界、新结构由教师明确讲授，故不属最小指导；文献里已有名字，即 Kapur 的有效失败与 Schwartz-Bransford 的《适合讲授的时机》）在本书中原封继承，并在第三十二章展开为完整的一节。不继承这三节，本书会被正确地误读为一份反对讲授的宣言，而它不是。

前言

一、这本书从哪里来

它从一节课来。

三年级"分数的初步认识"，一节设计精良的课。教师用分饼、涂色、折纸，把"二分之一""四分之一"讲得清清楚楚，当堂练习，全班几乎全对。一周之后，问同一批孩子一个更简单的问题： $1/2$ 和 $1/3$ ，谁大？

近一半的孩子答： **$1/3$ 更大**——因为 **3 比 2 大**。

这个现象太常见，常见到被当成"孩子还小、需要多练"的自然损耗而放过。本书用了三十四章来追问它，最后追到了柏拉图。

追下去的路上，本书撞进了一场进行了两千五百年、至今毫无收敛迹象的争论：数学对象是被发现的，还是被发明的。一派说 π 在人类出现之前就在那里，我们只是撞见了它；另一派说负数曾被称作荒谬的数、虚数至今还叫着当年那个怀疑的名字，它们不是被撞见的，是在走不通的地方被硬造出来的。

本书不打算加入这场争论。本书要论证的是，这场争论问错了，而且问错的原因，与那节分数课上发生的事是同一件。

那件事有一个可以写下来的形状。一个数学对象在历史上被造出来时，带着逼出它的那个真实困境（本书称土壤）与走通它的那条曲折之路（本书称路径）。进入课本时，这两样被磨掉，只剩一个光滑的显露被重新摆到起点。本书把这道工序称为光滑化：

发现 = 发生 - 路径 - 土壤

而争论双方争的，恰恰是这道工序的产物：他们指着一件已经被磨平的东西，争论它上游是什么样子——而磨平这道工序，正是一道把上游抹掉的工序。

二、这本书的重心不在它最像教科书的地方

必须先说一句，否则读者的注意力会落在错的地方。

本书的编六是工序：备课四问、发生五步、解锁三问、七个课堂案例。那一编最像一本教学法手册，最好读，也最容易被抽出来单用——而它不是本书的争点。编六第三十章开头就写明：那一章不是本书的发明；三个还原动作、五步环、"有指导的再创造"，各有其更早的作者，本书只是把它们排成了一个可以照着上课的次序。

本书唯一要求被独立评判的东西在编四，而编四的结论是一句不太好听的话。

发现学并不是"没有回写"。它照样在学习者身上写东西，而且写得非常成功——只是写下的不是"这个概念连着它的来路"，而是一条关于底盘本身的规则：这类对象无须改动我。这条规则由每一次成功的接收加固，由所有失败的归因（"我数学不行""老师讲得不够清楚"）保护其不被推翻，因而只进不退。而它的内容，恰好使后续的改写不再被触发。

于是一个认知动作的成功执行，取消了它自己后续执行的条件。本书称之为封写。

由此得到本书最不受欢迎的一条推论：

这道工序在四个尺度上都靠成功推进，不靠失败，因此它不可能被"做得更好"所解决。

四个尺度分别是哲学史、制度、学科、个人。最上面那层说的是：最会拆别人地基的人，自己的地基埋得最深。最下面那层说的是：最会教的老师，学生那条规则加固得最快。两句在结构上逐字对应，而它们所处的尺度相差两千五百年与四十分钟。

若读者只带走一句，请带走这一句，而不是那五个步骤。

三、我最没把握的五处

按本书自己在编四第二十三章给出的判据，一个对一切追问都有现成答案的理论，正是最可疑的那一种。所以把最没把握的五处写在最前面。

其一，编四那个机制没有一份数据。它是从概念论证与课堂观察推出来的；第三十三章把它写成了三个预注册实验，而那三个实验尚未执行。在它们跑完之前，编四是一个待检的假说，不是一个结论。这一条在书里说了四次，因为它是最容易被读者忽略的一条。

其二，"先在感指数"这个读数可能只是别的东西的改名。附录四那三条自我否决条款，就是为这个可能准备的。最容易发生的失败不是实验做砸，是读数其实是已有构念的换名。

其三，本书默认教师自己没有被封写。三个还原动作要求教师知道每个概念的来路；解锁三问要求教师自己觉得"数学本可以是别的样子"。这两个前提在多大比例的教师身上成立，我不知道，而且有理由怀疑不高。编四第二十四章那节课堂实录记的正是一位教师身上的封写。若这一笔欠得太重，编六全部工序都会停在纸上。

其四（五处里最要紧的一处）：本书编二那条承重判断不是新的。作者另有一篇十万字的哲学史总纲，把西方哲学史读成一台三冲程的机器——发现宣称、解构显形、偷运新磐石——并从苏格拉底到梅亚苏逐一检视了三十环。本书编二那条"每一次反攻都必须为自己另立一个先在"，就是它的第三冲程，而本书只处理了六位。导论第五节完整交代这一分工，编二编末再交代一次。

本书真正属于自己的只有一处，且不在编二：那篇文章记录了三十次显形，而它里面没有一个学生。

其五，编一编二那二十四位思想家，我读的是他们的主要文本与二手研究，不是全集。那两编的判断——"六次都只问从哪来""每次反攻都要另立一个先在"——是我尽力寻找反例而未找到的结果，不是穷尽的结果。每一编末尾都写明了推翻它需要什么。

四、这本书为什么这样写

三条体例上的交代，因为它们都是有代价的选择。

其一，每一章都有一节"一处对本书不利的读法"。三十四章，三十四节。这不是修辞上的谦虚，它是一条硬纪律：凡本书在某一章找不到一条像样的反读，那一章的判断即应视为尚未站稳。而更要紧的是它的后半——凡反读击中之处，正文当场修正，不留到末章。

这条纪律在写作中真的付了账。全书至少有四处判断因为反读而被改写：编二第十章关于"顺应"的用法被指出用歪了，改为"顺应发生了，但幅度被材料的形状压到了最小"；编四第二十二章的靶子被从"错误的信念"移到"没有来路的接受"；编三第十九章那句"发现范式第一次被外部核查而且没通过"被判定措辞过强，当场削弱；编六第二十九章那条纪律被指出藏着一个推掉举证责任的口子，拆成了两句。

其二，同一道挡板在书里立了五次。那道挡板是：本书主张学习者身上那种"它本来就在"的感受是被制造出来的；本书不主张数学命题的必然性是幻觉。前者关于人，后者关于命题，两者不能互推。

重复五次在写作上是笨拙的、读起来是烦人的。本书接受这份笨拙，理由在编二第十二章：另一套关于同类工序的描述，因为没有在第一页把两侧分清，被整体误读了二十五年，而作者事后删掉副标题里两个字也收不回来。在这件事上，笨拙比优雅便宜。

其三，全书证据只取数学与数学教育。这条纪律使本书不能使用大量现成的、相当有力的社会学与科学论工具。本书接受这个成本，理由同样在编二第十二章：换问句常常要换学科，而换了学科之后，新问句在原学科内部仍然等于不存在。

但这条纪律有一个必须堵上的口子，编六第二十九章已经堵上：它限制的是本书的材料来源，不限制对本书的检验标准。封写是一个心理学主张，那么它就得按心理学的规矩来。

五、这本书假定读者是谁

不假定读者读过哲学史，也不假定读者是数学专业。

编一编二会出现二十四位思想家，但每一位进入本书的理由都只有一条——他在“磨平”这道工序上做过一次可指认的操作。凡写不出这一句的人不进本书，无论他多重要。因此读者不需要事先知道他们的整套学说；本书需要的那一步，本书会当场摆出来，并给出可以核对的坐标。

数学那一侧同样。全书用到的最深的数学，是三角形内角和、分数比大小、一元二次方程的求根公式，以及“非欧几何存在”这个事实。第十四章那二十个对象的清单，是小学到大学一年级会遇到的，不是冷僻例子。

本书真正假定的只有一件事：读者曾经在某个数学概念面前，有过“这东西为什么是这样”这个念头，而当时没有人回答他。

六、怎么读

只有一小时。读附录一那三十四张判断卡片——每章一张，是判断不是描述；顺着读一遍，即是本书的骨架。读不懂的那几条，回该章第一节。

关心教学。编六 → 附录三（工序手册）→ 附录四（量表与采集方案）。编四作为它的理由，可后读；但若跳过编四，编六第三十一章那道解锁工序会显得没有必要，因为它对准的病灶在编四。

关心哲学。导论 → 编一 → 编二 → 编五 → 附录六。编三编四是这三编的机制解释。若已读过导论第五节提到的那篇哲学史总纲，可从导论第五节直接跳编四——那一编是本书唯一不与它重叠的部分。

关心方法。编三 → 编六第三十三章 → 附录四。这条线处理的是“如何把一个不可见的机制变成可测的东西”，与本书的具体结论关系不大，可独立读。

要挑毛病。从编四第二十四章那八位占位者开始。若其中一位已经同时说出了本书那两句增量（阻断者是回写这个动作本身、被阻断的是改写权），本书的争点即告作废，而这一点核对成本很低——去查那八位的原文即可。附录五逐条注明了本书是在哪一处与他们分界的。

给学生读。不必读全书。可以只读三处：导论第一节那三个场景、编三第十四章那二十个对象的来路、编六第三十二章那七个案例。这三处加起来不到两万字，而且不需要任何前置知识。

七、一个请求

如果这本书有一件事值得做，是附录四那个最低可行版本：

在三、四、五、六年级各取两个班测一次先在感指数，再测它与一周后回写题正确率的相关。

一所学校一周之内可以做完，不需要任何设备，不需要改动任何课程。

若那个指数不随年级上升，或它与回写题的相关为零或为正，本书编四即受严重挑战。

我希望有人去做这件事，并如实报告不利的结果。本书交出了十二条可被击中的位置，它们只有在有人真去击的时候才有意义。

还有一个更小的请求，任何一位读者都可以当场做：拿起你手边任何一本数学教材，翻到任何一章，数一数“这个概念是为解决什么而出现的”这句话出现在第几段。本书的判断如果错了，这个核对会立刻显出来。

九、本书没有做到的三件事

写在最后，因为读完之后再读它们更清楚。

其一，本书没有一份成功的课堂实录。编四那五节实录记的全是失败——两个孩子的两种“不知道”、一堂什么都做对了仍然无效的补课、一位教师身上的封写。本书有失败的实录，没有成功的实录，因为编六那套工序尚未在任何一间教室里被系统地跑过。第三十二章那七个案例因此是有理由的设计，不是被验证过的教案，读者拿走它们时应当知道自己在拿什么。

其二，本书没有处理班级。全书的工序以个体为单位设计，而教学以班级为单位发生。一个困境对某些学生是真的，对另一些是伪的（他们早会了），对再一些是过难的；在一个四十人的班里，“任务在学习者能力的边缘”是四十个不同的边缘。第三十章第七节把这一笔列为欠账，本书没有偿还它。

其三，本书没有回答那个划不划算的问题。编三第十七章那道挡板承认：教育的目的完全可以正当是“让人会用”，一个社会需要大量会算账、会看图表的人，不需要每一个都在自己身上把统计学重新发生一遍。本书能做的是把这笔账的另一侧摆出来——代价不落在已经学会的那些东西上，落在还没有学的那些上——但这笔账怎么算，不是本书能决定的。

本书唯一坚持的是：这笔账目前根本没有被算过，因为账的另一侧从来没有被记录过。附录四那张量表最低限度的用处，是让这一侧第一次有一个数字。

十、致谢与一句交代

本书受惠于书中逐章指名的每一位——尤其是那些本书与之划界最细的几位：他们的工作越接近本书，本书就越必须把分界划得清楚，而这个过程本身改进了本书。一本书能从对手那里学到的，通常比从盟友那里多。

最后一句交代。本书不是一份关于数学的社会学著作，也不主张数学真理是被造出来的。编一第五章把这条分界完整地交给了弗雷格，并且说明了本书离了这条分界立不住。

本书全部的工作，只落在一件很窄的事情上：

一件已经造好的东西，被交到一个还没有它的人手里的那一刻，发生了什么。

导 读

前言交代了这本书从哪里来、我最没把握的地方、以及它是怎么写的。这一篇只做一件事：把全书的论证链摆成一条线，让读者在进入正文之前就知道每一编在承担什么。

若把这条线压到最短，它是六步。

第一步（编一）：两千五百年里，有六个人做了同一个动作

从柏拉图到布尔巴基，六位思想家各自宣布找到了一块不依赖任何人的地基——理念世界、公理体系、天赋观念、主体形式、第三领域、数学直觉。六个户头，五种答案，一台机器。

而它们有一个共同的语法，这是编一的承重发现：

六次都只问“这个对象从哪来”，从不问“它怎么被接住”。

这不是六个人的疏忽。当你手上拿着的是一件已经磨光的产物，你能提出的问句只有关于它出身的那一类——你不会去问一颗鹅卵石“你是怎么被接住的”，你只会问“你原来是什么形状”。

而那个共同动作有一个名字，第十三章正式给出：回溯性本体化——一件在特定条件下被稳定化出来的成果，被回溯性地提升为“世界本来如此”的证据。

第二步（编二）：另一侧六次反攻，每一次都赢在局部、输在整体

亚里士多德拆掉了那个多余的世界，维柯说出了整场争论里最接近本书的一句话，布劳威尔在数学内部真刀真枪打了一仗并且自己出钱，皮亚杰把“发生”第一次变成可观察的东西，拉卡托斯用一部两百年的档案证明了定义是产物，拉图尔与伍尔加换了问句。

六次都是实打实的胜利。而六次的失败形状完全相同：

每一次反攻，在它取胜的那一处，都必须为自己另立一个先在。

理由不在他们的性格里，在讲述这件事的结构里：要把一块地基显形为发生，你必须选定条件、切出路径、裁决为真——而这三条标准都只能被预设，且预设长期使用中硬化、结壳、沉底。

于是编一编二合起来，才把那场争论的形状说清：发现派把先在放在对象一侧，发生派把它放在构造者一侧；两派各自都需要一个先在。单看一侧，只会以为对面固执。

编末另交出三次逃逸测试（皮浪、蒙田、科学与数学），得到边界定理：逃出的充要条件是不宣称；而不宣称者不奠基。

第三步（编三）：把那道工序拆开

不再争论上游，只做一件事：把光滑化拆开、给材料、指位置。

它有三步（磨掉土壤、磨掉路径、把显露摆为起点），有二十份材料（从无理数到概率，逐条给出困境、路径、课本上剩下的那一句），最后落在一个谁都可以核对的地方——排版：

判断一段呈现有没有执行这道工序，不看它省略了多少历史，只看它把定义摆在哪里。

编三还立了全书最重要的一道挡板，而且立在正中间而不是末尾：光滑化是文明的必需，不能取消。若每一代人都必须从零把全部数学重新发生一遍，人类的数学将永远停留在一个人一生能重新发现的量级上。

问题只在一处：适合存储与传递的形态，未必适合习得。而这两份形态在历史上从未被分开处理过——因为存储那一份先做好了，而且做得那么成功，以至于没有人再去问是否需要另做一份。

编末留下一个它自己答不出的问题：为什么光滑化做得最好的地方，接收出问题最严重？

第四步（编四）：全书重心

上一问在传递一侧无法解释——传递做得越干净越清楚，效果应该越好才对。它必须由接收一侧的某个机制来解释。

入口是一个反问：那半个班的孩子，一周后不是茫然，是笃定。而空白不会有信心。

发现学不是没有回写，是回写落错了层。

写进底盘的不是这个概念的来路，是一条关于底盘本身的规则；它由每一次成功的接收加固，由所有失败的归因保护其不被推翻；而它的内容恰好使后续的改写不再被触发。一个认知动作的成功执行，取消了它自己后续执行的条件——封写。

编四同时收紧了措辞：写下的是一把锁，不是销毁了写头。锁可解，但解锁的动作与纠正任何一个对象层的误解不是同一种动作——补讲、多练、换更好的例子，全都打在对象层，全都撞在锁上。

这解释了一件教师普遍经历、却从未被解释过的事：为什么某些概念，无论换多少种教法、补多少次课，都补不动。

第五步（编五）：四组老对峙的改判

发现／发明、先天／后天、传授／探究、实在论／建构论——四组分属四个领域，而本书论证它们是同一处误置的四个面，四次改判用的是同一把尺子：

一个问句若不能指定它问的是命题一侧还是接收者一侧，它就不会有答案。

其中最实用的一条落在教室里：判据是回写，不是课堂的动静。一堂安静的讲授课，若教师把困境摆出来、把路径带学生走通、并验了改写，它是发生学；一堂热闹的探究课，若答案早已光滑地预设的教师心中，它仍是发现学。

第六步（编六）：不问归属，问工序

拆掉一个提了两千五百年的问句，就有义务给出替换它的那个。本书给的是：这件东西是以什么形状被交出去的？交出去的时候，接收者身上发生了什么？

工序是两道，次序不能颠倒：先解锁，再还原。去光滑化处理“这一个概念”（把困境与路径还回来），元层解锁处理“这一类东西”（松动那条关于改写权的规则），后者一学期做三四次即可。

而全书的主张最后被交给了三个尚未执行的预注册实验，连同三条撤稿级条件——其中一条写明：若某个交互项不显著，编四第二十三章须删除。

三句给不同读者的话

给教师：本书要动的只是那少数几个“反复教不好”的概念，不是整个课堂。四类东西应当直接讲（约定、安全、名字、脚手架），它们加起来可能超过一节课的一半。本书不反对讲授；本书主张的是学生先撞到旧办法的边界，然后由教师明确地讲授新结构——改变的只有它讲在什么时候。

给哲学读者：本书不属于发现派，也不属于发生派。若一定要给它一个位置，它在争论的下游，而且这份中立可以被检验——本书全部判断在“ π 在人类出现之前是否存在”上取任何答案都照样成立。

给要挑毛病的人：本书交出了十二条可被击中的位置，分散在各编各章、写在它们所对应的判断旁边。最省力的一条在编四第二十四章：八位占位者中若有一位已经同时说出了本书那两句增量，本书的争点即告作废。

最后一句，关于这本书自己。

按本书自己的诊断，一件被磨光的成品最可能的下场，是被再压缩一次、变成一张可以贴在墙上的表。本书预期自己会有同样的下场，并且给了读者一条识别码：

看到有人在用本书的工序，却说不出它在什么情况下无效——那份东西已经不是本书了。

目 次

出版信息	2
母题	4
七条写作纪律	5
与作者其他四处相关工作的分界	6
前 言	7
导 读	11
导论：一个提了两千五百年、却从来没有被问对的问题	16
编一 先了的六次立法	24
第一章 柏拉图：把产物摆到起点上	25
第二章 欧几里得：把次序做成机器	28
第三章 笛卡尔与天赋观念：把来路搬进灵魂	31
第四章 康德：把先在从世界搬到主体	35
第五章 弗雷格：把发生逐出数学	39
第六章 哥德尔与布尔巴基：两个方向的极致，以及第一次撞墙	43
编二 发生的六次反攻	47
第七章 亚里士多德：把理型拉回个体，而抽象说不出必然性	48
第八章 维柯：真理即所造——最接近的一句话，与它走反的那一步	51
第九章 布劳威尔：数学内部最硬的一次进攻，和它付出的真实代价	54
第十章 皮亚杰：把发生变成可观察的，以及他没有走的那一步	58
第十一章 拉卡托斯：定义是产物不是起点——一部有材料的反例史	62
第十二章 拉图尔与伍尔加：一事实如何把它的来路从自己身上抹掉	66
编末小结	70
编三 工序：光滑化的解剖	75
第十三章 三重操作与一个名字：回溯性本体化	76
第十四章 二十个数学对象的来路	82
第十五章 文本的次序：定义为什么在第一页	86
第十六章 三份自供：发现的次序与呈现的次序	90
第十七章 光滑化是文明的必需——全书最重要的一道挡板	94
第十八章 存储形态与习得形态的分岔	99
第十九章 制度化的极限：布尔巴基、新数学，与一次可外部核查的失败	103
编末小结	107
编四 代价：回写杀死了回写	109
第二十章 发现学真的没有回写吗	110
第二十一章 元层回写：底盘上被改写的是一条关于回写的规则	113
第二十二章 加固与先验的虚幻	117

第二十三章 封写：一个认知动作的成功，取消了它自己的后续	121
第二十四章 八位占位者：逐条辨异	126
编末小结	130
编五 重审：四组老对峙的改判	134
第二十五章 发现／发明：一个由工序制造出来的问题	135
第二十六章 先天／后天：必然性既不在印象里，也不在灵魂里，在路径里	140
第二十七章 传授／探究：判据是回写，不是课堂的动静	143
第二十八章 实在论／建构论：两侧，以及双方换来换去而不自知	146
编末小结	149
编六 出路：不问归属，问工序	151
第二十九章 问句的更换，及其代价	152
第三十章 去光滑化：三还原与发生五步	155
第三十一章 元层解锁：五步环之前的那一道工序	159
第三十二章 七个案例；以及本书为什么不反对讲授	163
第三十三章 三个预注册实验，与三条撤稿级条件	167
第三十四章 边界、局限，与本书自己的可推翻条件	171
编末小结	174
结语 一个问题的一生	176
附录一 三十四张判断卡片一览	178
附录二 二十个数学对象的发生学原点表	183
附录三 工序手册	185
附录四 先在感指数 π：量表与采集方案	188
附录五 参考文献	191
附录六 磐石的后退航线：十二站	195
作者介绍	197

导论：一个提了两千五百年、却从来没有被问对的问题

一、三个场景

先摆三个场景。它们分属三个完全不同的领域、相隔两千多年，但它们是同一件事。

第一个场景在教室里。三年级"分数的初步认识"，一节设计精良的课。教师用分饼、涂色、折纸，把"二分之一""四分之一"讲得清清楚楚，当堂练习，全班几乎全对。一周之后，问同一批孩子一个更简单的问题： $1/2$ 和 $1/3$ ，谁大？近一半的孩子答： $1/3$ 更大——因为"3 比 2 大"。

第二个场景在数学系的走廊上。两位数学家在争论一件他们都很在意、又都说不清的事。一位说，数学对象是被发现的：黎曼 ζ 函数的非平凡零点落在哪里，不因任何人的意愿而改变；我们像天文学家发现一颗早已存在的行星那样，撞见了它。另一位说，不对，数学是被造出来的：负数曾被称作"荒谬的数"，虚数至今还叫着 imaginary 这个当年怀疑的名字，它们不是被撞见的，是在走不通的地方被硬造出来、再一点点被接受的。两个人都举得出无数例证，两个人都说服不了对方。这场争论有一个体面的名字，叫数学柏拉图主义之争，它至少已经进行了两千五百年。

第三个场景在一本教科书的第一页上。任何一本数学教科书，翻开第一章，第一句话通常是一个定义。"设 X 是一个集合.....""分数是把单位 1 平均分成若干份.....""三角形内角和为 180° ""。定义在最前面，性质在中间，应用在最后。这个次序如此天经地义，以至于几乎没有人问过：为什么一本书要从它的结论开始？

这三个场景通常被分别处理。第一个归教育心理学，第二个归数学哲学，第三个根本不被当作一个问题——它只是"书就是那么写的"。

本书要论证的第一件事是：这三个场景是同一件事的三个断面，而且第三个场景是前两个的原因。

二、这场争论的形状

先把第二个场景的争论摆清楚，因为它是本书的主战场。

争论的问题是：数学对象（以及推而广之，一切成熟的知识对象）是被发现的，还是被发明的？

发现派的核心直觉极其有力，而且几乎人人都有过。数学真理看起来必然、普遍、永恒：三角形内角和为两直角，不因任何人的意愿而改变，也不因世上有没有人画过三角形而增减。哥德巴赫猜想的真假在被证明之前就已经确定了，我们只是还不知道是哪一个。这种必然与永恒，似乎强烈地要求一个非经验的、先在的根据。柏拉图把它安放进一个永恒的理念世界，是一个极自然、也极有力的解释。从哈代到哥德尔，许多第一流的数学家都是坚定的柏拉图主义者，他们所描述的那种"数学真理仿佛独立于我而存在、我只是撞见了它"的经验，真切而普遍。

发生派（在文献里通常叫发明派、构造主义、直觉主义，或在更宽的意义上叫建构主义）的证据同样有力，而且是历史性的。每一个今天躺在课本里看似天然自明的对象，都能查到它被造出来的过程。微积分最初充满了"无穷小"这种在逻辑上站不住脚却在直觉上极有威力的粗糙对象，经过近两百年的争论与修正，才被柯西、魏尔斯特拉斯磨成今天课本里光滑的 ε - δ 定义。负数在欧洲曾被称作"荒谬的数""虚构的数"，因为"比无还少"在直

觉上讲不通。集合论、非欧几何、复数、群，无一不是如此。发生派问：如果这些东西一直都在那里，为什么找到它们要花两千年，而且找的过程如此丑陋？

两派各自都有大量证据，各自都能解释对方的证据（发现派说“找得慢不等于不存在”，发生派说“必然感可能是习惯”），于是争论稳定地进行了两千五百年，没有收敛的迹象。

一场进行了两千五百年而毫无收敛迹象的争论，通常不是因为双方都很笨。更常见的原因是：问题本身有毛病。

三、双方共用的那个前提

本书的切入点是一个双方都没有注意到的共同点。

请注意，两派争论的对象，是一个已经成熟的数学对象。他们指着 ζ 函数、指着 π 、指着三角形内角和，问：这东西是被发现的还是被发明的？

他们从来不指着一个正在发生的東西问这个问题。因为一个正在发生的東西——一个数学家此刻正在草稿纸上试着凑合、还没有名字、还不知道能不能立住的东西——根本提不出这个问题。你没法问“这团还在改的东西是被发现的还是被发明的”，因为它还不不是一个“东西”，它还没有那个可以被追问出身的、边界清楚的形状。

所以：“是被发现的还是被发明的”这个问题，只在对象已经成熟、已经稳定、已经获得清晰边界之后，才提得出来。

这一句听起来平淡，但它是本书全部工作的入口。因为它意味着：这个问题的提出条件，正是本书要研究的那道工序的产物。争论双方都站在那道工序的下游，指着它的产物争论上游是什么样子——而那道工序恰好是一道把上游磨掉的工序。

打个比方。两个人对着一块被水冲刷了千万年的鹅卵石争论：它原来是不是圆的？一个说是，一个说不是。他们可以争一辈子，因为使它可以被拿在手里端详的那个过程，正是抹掉它原来形状的那个过程。

这就是本书的第一个判断：

发现与发生不是两种对立的主张，是同一条发生链的两个时相。发生是链在跑，发现是链跑完并被磨平之后的样子。

四、那道工序：光滑化

给这道工序一个名字：光滑化。

一个数学对象在历史上被造出来时，带着三样东西：逼出它的那个真实困境（本书称土壤），从困境走到它的那条曲折之路（本书称路径），以及最后结晶出来的那个可辨认的形（本书称显露）。

进入教科书时，发生了三件可分辨的事：

其一，磨掉土壤。课本不再说“当年人们遇到了什么走不通的问题，才不得不造出这个东西”，而直接给出成品。

其二，磨掉路径。从困境走到对象的那条曲折之路——试错、命名、修正、收敛——被删除，只呈现路径的终点。

其三，把显露再摆为起点。剩下的那个光滑的形，被重新摆放为一个起点而非结果。教科书顺序（先定义、再性质、再应用）正是这一操作的制度化。

三件合起来，可以写成一个简洁的刻画：

发现 = 发生 - 路径 - 土壤

第三件是最隐蔽、也最具决定性的一件。前两件只是做了减法，尚未颠倒次序；真正的颠倒发生在第三件：它把发生链的终点搬到最前面，当作一切的开端。而这一搬，就是第一节第三个场景——教科书为什么从它的结论开始——的全部答案。

于是"对象先在"这个感受有了来源：当一个东西的来路被彻底磨平，它当然显得像是一直都在那里。发现派之所以顽固而自然，正因为它忠实地记录了学习者面对光滑成品时的真实感受。

这里必须立刻说一句公道话，它贯穿全书：发现派报告的现象学是真的。本书不打算论证哈代和哥德尔在撒谎或在自欺。恰恰相反，本书预言了他们的经验：一门已经成熟、已被反复走通的数学，落到任何后来者眼里，本来就必定显得是被发现的、是先在的。分歧从来不在这种经验真不真，而在于：要不要把这种"显得先在"，直接当成"确实先在"，从而非为它另立一个世界不可。

五、一部先行的哲学史，和本书与它的分工

必须在导论里处理一件事，而且要处理在最前面：本书编二那条承重判断，作者已经在另一处做过一次，而且做得比本书大得多。

那是一篇十万字的哲学史总纲，题为《西方哲学 2500 年：发生对发现的否定序列》。它把西方哲学史读成一台三冲程的机器：

第一冲程，发现宣称。一位哲学家宣布他找到了一块不依赖任何人的磐石——它不是被造出来的，它本来就在那里。

第二冲程，解构显形。后来者走到磐石跟前，不问"它是不是真的"，而问"它是怎么来的"；追问一开动，磐石就显出了年轮——它有出生日期、出生地、制造它的焦虑与需要。发现被显形为发生。

第三冲程，偷运。解构者要讲述前人磐石的发生史，就必须站在某个地方讲；而那个立足点，在他自己的叙述里是不被追问的。新磐石落成，新一轮开始。

三十个环节，从苏格拉底到梅亚苏，逐环给出磐石、解构者、被显形的条件与路径、以及偷运的新发现。

本书编二编末那条判断——"每一次反攻，在它取胜的那一处，都必须为自己另立一个先在"——就是那篇文章的第三冲程。本书处理了六位反攻者，那篇处理了三十环；本书说"问句的语法里必须有一个主语"，那篇给出了更完整的结构论证（见下一节）。

这一条必须写在明处，而不是等到编二编末才提。一本书若在它的第七章才交代自己最核心的一条判断已经被别人做过，那本身就是一次光滑化。

那篇文章给出的四条规则

那篇文章从三十个案例里归纳出四条规则，本书全部接受，并且它们中有两条本书原来没有，须在此补上。

规则一：每一环都是真诚的。序列里没有骗子；没有一位哲学家自觉地偷运过什么——偷运之为偷运，恰恰因为立足点在使用它的人眼里是透明的，像空气，像戴久了的眼镜。解构前人时目光如炬，安放自己时视而不见：这不是道德缺陷，是结构位置使然。

这一条本书原来没有明写，而它对本书极其要紧：本书编四要说的那三款元层规则，同样不需要任何人的恶意——它烧的燃料是真诚。

规则二：发生这把刀，总是只对前人开刃。每一环的解构者都掌握发生学的全部技艺，而且技艺一代比一代精；但无论刀法多精，刀总是恰好在自己的地基前收住。推论是

反直觉的：解构技艺的进步不会终结序列，只会加深序列——刀越锋利，它停下的那个位置就显得越神圣。

这一条与本书编四第二十二章那句“教得越好，加固越快”，是同一个形状。第四节会说明它的分量。

规则三：磐石一路后退，从对象界退入条件界。本原（水·数·相）→ 神 → 我思 → 范畴 → 精神／历史 → 意志 → 逻辑／语言 → 存在 → 权力／范式 → 文本 → 对话 → 偶然性。每一次解构都把“不可追问之物”往更深处赶。本书编一那张六个户头的表，是这条十二站航线的前六站；附录六给出完整航线。

规则四：解构不摧毁前人，而是完成前人。被显形的磐石并不作废——柏拉图的理念活在整个西方语言的“本质／现象”语法里，康德的范畴仍是认知科学的脚手架。序列淘汰的从来不是理论的用途，只是理论的身份：从“永恒地发现”降格为“有效的发生物”。而且降格之后它往往更耐用了，因为它不再需要为自己的永恒性辩护。

那篇文章给这一条一个极好的说法，本书全书采用：显形不是拆迁，是产权变更登记。

这一条也是本书原来欠着的。本书编三第十七章立了“光滑化是文明的必需”那道挡板，但那道挡板讲的是为什么不能取消这道工序；规则四讲的是另一件事——被显形之后的那些东西，一件也没有作废。两道挡板方向不同，缺一不可。

那篇文章的结构论证，比本书编二的更完整

本书编二编末给的理由是：“否认对象是先给的，就必须说出是什么在构造它；而无论说出什么，那个东西都会被提升为不再被追问的起点。问句要求一个来源。”

那篇文章给的理由更细，而且是可以逐条检查的。要把一块磐石显形为发生，你必须做三件事，一件都省不掉：

第一，选定条件。一件事的条件是无穷的；讲述者必须裁决哪些条件“算数”。裁决需要一条相关性标准，而这条标准不能来自这场讲述本身——讲述还没开始。

第二，切出路径。路径是连续的；从哪一步讲起、在哪一步收束、把哪些岔路剪掉，都是切割。切割需要一条起点与粒度的标准，同样不能内生。

第三，裁决为真。讲述完成后，它宣称“事情确实是这样发生的”；这个宣称需要一套真值标准。若这套标准又要靠另一场发生叙述来奠基，回退无穷。

三条标准都只能被预设。而预设长期使用中硬化、结壳、沉底——在使用者眼里，它们不再是选择，而是“本来如此”。一块新磐石落成了。

结论一句话：偷运不是失误，是讲述发生这个行为的必要开销；不是哪一环的缺陷，是每一环的成本。

本书采用这个论证，替换掉编二编末原来那个较弱的版本，并在那里注明出处。

四层同形：本书从这篇文章得到的最重要的一样东西

本书编四编末指出，全书的脊梁在三个尺度上同时成立：

制度层：光滑化的每一次制度化，不是由某个人决定的，是由某个成功决定的。

学科层：做得最好的那一份，遮蔽力也最强。

个人层：元层那条规则不是由某次失败写下的，是由某次成功写下的。

那篇文章的规则二给出了第四层，而且是最上面的一层：

哲学史层：解构技艺的进步不会终结序列，只会加深序列——刀越锋利，它停下的那个位置就显得越神圣。

四层，同一个形状：这件事靠成功推进，不靠失败。

请看这四层的关系。哲学史层说的是：最会拆别人磐石的人，自己的磐石埋得最深。个人层说的是：最会教的老师，学生那条规则加固得最快。两句在结构上逐字对应，而它们所处的尺度相差两千五百年与四十分钟。

这是本书能得到的最强的一次交叉验证，而且它的方向对本书是不利的——它意味着本书自己也逃不出这条规则。一本论证“这道工序靠成功推进”的书，若它成功了，就会把它自己那条立足点埋得比谁都深。这一点第三十四章会正面处理，但读者应当在导论里就知道它。

本书与那篇文章的分工

写死，四条：

其一，尺度不同。那篇处理三十环、两千五百年、全部西方哲学；本书只处理数学与数学教育，且只取十二位，选取标准是编一那条纪律——一个人进入本书的唯一理由，是他在“磨平”这道工序上做过一次可指认的操作。

其二，位置不同，而且这是最要紧的一条。那篇文章处理的是上游的传递：一块磐石如何被立起、被拆开、被换成新的。它全部发生在专业哲学家之间。

本书处理的是下游的接收：这件已经磨光的东西，被交到一个还没有它的人手里之后，那个人身上发生了什么。那篇文章里没有一个学生。

用那篇文章自己的话说，它记录了三十次显形（把磐石的配方与工序公之于众）；本书问的是另一件事——一个从未见过任何配方的人，接住一件成品时，他的底盘上被写下了什么。

其三，产物不同。那篇的产物是一张地图（十二站后退航线、五种海关、六式刀法、三十环总表）；本书的产物是一道工序与一个可测的读数（去光滑化、元层解锁、先在感指数）。

其四，本书新的部分只有一处，而且与那篇文章不重叠：封写。那篇说的是“偷运”——解构者自己免检的那件新货；本书说的是“封写”——接收者身上被写下的一条使后续改写不再被触发的规则。前者关于讲述者留下了什么，后者关于接收者失去了什么。

这两件事可以分开，而且分得开这一点是决定性的：一位完整地知道整条否定序列、能背出三十环的哲学史教授，完全可能在自己的课堂上执行最彻底的光滑化。他的偷运是明的，他的封写照样是暗的。

一处必须承认的地方

那篇文章的第十一章跑了五个测试案例（皮浪、蒙田、后期维特根斯坦、科学、数学），本书编二没有做过这件事——本书只检验了六位反攻者，没有系统检验“有没有人逃出去了”。

编二编末已按这一条补上，那五个测试的结论在那里完整交出，并注明来源。一本论证“六次都没逃出去”的书，若不先检验“有没有人逃出去过”，那条论证是不完整的。

六、诚实地指认前人

这个判断并非全新。指认先行者不是学术礼节，是本书划出自己边界的唯一办法——说清别人已经做到哪一步，本书的增量才有位置可放。

弗赖登塔尔 (Hans Freudenthal) 在《作为教育任务的数学》(1973) 中提出的反教学法的颠倒 (anti-didactical inversion), 几乎就是上一节的另一种表述: 传统教学把数学活动的最终产物当作教学的起点, 这是对数学之为一种发明活动的颠倒。他据此主张有指导的再创造。他还有一本《数学结构的教学法现象学》(1983), 逐一追问每一个数学结构"当初组织了哪些现象"——那本书的做法, 与本书编六那张发生学原点表高度重合。

谢瓦拉尔 (Yves Chevallard) 的教学转置 (transposition didactique, 1985) 刻画了知识从"学者知识"到"待教知识"再到"被教知识"的整条制度性搬运链, 并指出链上两个关键动作: 去情境化与去个人化——知识被剥去它产生的问题情境, 也被剥去做出它的那个人与那段时间。这两个动作, 几乎就是本书"磨掉土壤"与"磨掉路径"的另一种命名, 而且比本书更早、更完备地描述了它的制度机制。

胡塞尔在《几何学的起源》(1936) 中提出沉积 (Sedimentierung) 与再激活 (Reaktivierung): 几何的理念对象起于实际的测量与作图, 但这个起源在传承中被一层层沉积、遮蔽, 于是理念对象显得自明、非历史、先于一切经验; 恢复其意义的唯一办法, 是再激活那被掩埋的起源。这与本书的"光滑化/去光滑化"是同一个形状, 而且早了近九十年。

皮亚杰的发生认识论关心认知结构如何在儿童身上逐步发生, 并给了本书两个关键词: 同化与顺应——本书所说的回写, 在他的语言里就是顺应。

拉卡托斯的《证明与反驳》(1976) 揭示, 真实的数学从来不是从定义顺流而下的光滑演绎, 而是一部充满猜想、反例、概念被反复修订的准经验史; 定义不是起点, 是与反例搏斗到最后才勉强稳定下来的产物。

拉图尔与伍尔加的实验室研究给出了同一个形状在自然科学一侧的版本: 一个陈述越是被接受, 它被造出来的过程就越是从它身上消失, 最后只剩一个"事实"; 而这个消失是系统性的、可观察的, 不是修辞。

这六位 (编二还会加上更多) 已经把上一节那件事说得相当清楚了。那么本书还剩什么?

七、本书的增量在哪里

三处, 逐一说明, 并且都指向同一个方向: 从"上游是什么"转到"下游发生了什么"。

其一, 把这场争论本身当作被解释项, 而不是当作一个待站队的问题。上述六位处理的都是"知识如何被加工", 他们的批评对象是制度、教科书、传承方式。没有一位把"发现还是发明这场争论"本身放进解释范围。本书的做法是: 不加入争论, 而是解释这场争论何以能进行两千五百年、且双方都拿得出无限的证据。答案在第三节——这个问题的提出条件是那道工序的产物, 因此它在原理上不可能被上游的证据裁决。这是本书编五整整一编的工作。

其二, 接收端不是被动的。上述六位的模型都是单向损失: 颠倒、去情境化、沉积——某样东西在传递中丢了。本书要论证的是, 接收端还会主动回写: 一个学习者顺利接住一件光滑成品之后, 他的底盘上被写下的不是这个概念的来路, 而是一条关于底盘本身的规则——这类对象无须改动我。这条规则每被一堂成功的课加固一次就更硬一分, 其累积产物是一种具备先验之全部外观、实则习得的自明感, 本书称为先验的虚幻。这是编四第一半的工作。

其三, 也是最重的一处: 这条规则的内容, 恰好使后续的改写不再被触发。于是回写的一次成功执行, 取消了它自己后续执行的条件。本书称之为封写。这一条解释了一件所

有教师都经历过、而上述六位的框架都解释不了的事：为什么把路径还回去，也常常没有用。弗赖登塔尔的框架说，问题在于产物被当成起点；那么把起点改回去就该有效。可是任何一位教过高年级的教师都知道，重新分饼、重新折纸、把整个困境完整摆出来，班上仍会有孩子礼貌地配合，然后抬头问一句：“老师，你直接讲结论吧。”这句话不是不耐烦，它是一份精确的报告：在这个孩子的理解里，一个数学对象没有来路这回事。

第三处是本书唯一要求被独立评判的东西。前两处是把既有洞见接起来、装成工序；第三处提出的是一条既有文献未曾提出的机制，且它可以被实验推翻——编六第三十三章把它写成了三个预注册实验，并当场写死了三条撤稿级的条件。

八、本书不做什么

四条，写在前面，免得读者读到一半才发现被引到了别处。

其一，本书不裁决数学的必然性。三角形内角和是否必然为两直角，属于数学哲学，本书不作定论。本书主张的是：学习者身上那种“它本来就在”的感受是被制造出来的；本书不主张：数学命题的必然性是幻觉。前者关于人，后者关于命题，不能互推。这道挡板在编四第二十二章正面立起，编五第二十六章再立一次。

其二，本书不反对讲授。这是最容易发生的误读，且后果最实。本书主张的次序是：学习者先撞到旧办法的边界，然后由教师明确地讲授新结构。这不是最小指导教学，恰恰相反——若把本书读成“让学生自己去发现新结构”，则 Kirschner、Sweller 与 Clark 在 2006 年那篇著名批评的每一个字都适用于本书，而本书不作抵抗。这一立场在文献里已有名字：**Kapur** 的有效失败（productive failure）与 **Schwartz** 与 **Bransford** 的《适合讲授的时机》。第三十二章完整交代。

其三，本书不主张个体学习重演学科发生史。复演说（recapitulation）在教育史上有过一段并不光彩的历史，本书与它无关。本书要还给学习者的不是历史的路径，是一条他自己走得通的粗糙路径——第三十章会论证，这两者往往不是同一条，而且不该是同一条。

其四，本书全部证据来自数学与数学教育。光滑化与封写是否在别的学科同样发生，本书不知道，也不主张。第三十四章会给出一个便宜的旁证性检验，但那不是本书的主张。

九、全书的形状

编一《先在的六次立法》：柏拉图、欧几里得、笛卡尔、康德、弗雷格、哥德尔与布尔巴基。六个人，六次可指认的操作，共同把“对象先在”从一种感受立成了地基。本编对发现派尽最大的公道：不写成一串错误，写成六次在当时是对的、且解决了真问题的操作。

编二《发生的六次反攻》：亚里士多德、维柯、布劳威尔、皮亚杰、拉卡托斯、拉图尔与伍尔加。六次进击，每一次都在局部赢了，每一次都在整体上输了一一而输的原因六次相同。编末另交出三次逃逸测试（皮浪、蒙田、科学与数学），并交代本编与上一节那篇哲学史总纲的分工。

编三《工序》：把光滑化拆开。三重操作、九个数学对象的历史实证、教科书次序的制度化、布尔巴基与新数学改革——发现派第一次在现实中被证伪，而且是在教室里。

编四《代价》：元层回写、加固、先验的虚幻、封写、第四种死亡。全书重心。

编五《重审》：把四组老对峙逐一改判——发现／发明、先天／后天、传授／探究、实在论／建构论。每一组都被诊断为同一处误置，且每一组的改判都给出可裁决的形式。

编六《出路》：不问归属，问工序。去光滑化、元层解锁、七个数学案例、三个预注册实验、边界与本书自己的可推翻条件。

结语：一个问题的一生。

十、几个约定

关于"发生"这个词。本书用它指一件认知物在一个具体的人或一个具体的共同体那里从无到有地长出来的整个过程，包括它的困境、路径、结晶，以及它反过来改写那个人已有理解的那一步。它不等于"产生"——产生是单行道，做出来就完了；发生是回环，最后那一步（本书称回写）是它区别于产生的地方。

关于"发现"这个词。本书不在贬义上使用它。发现是真的：它端出的那个显露是真的， $1/2$ 确实是那么写的， 180° 确实是那个和。本书要辨的只有一处——它减掉了什么，以及这个减法在接收端造成了什么。

关于本书自己的立场。本书不属于发生派。发生派与发现派争的是同一个问题，本书认为那个问题问错了。若一定要给本书一个位置，它在争论的下游：它研究的不是这件东西从哪来，是这件东西一旦成形，会以什么形状被交出去，以及交出去的时候发生了什么。

关于本书敢让什么判自己输。母题框里那两条可推翻条件是全书级的；每一编末尾另有本编级的；第三十三章那三个实验带着三条撤稿级条件。一个连自己怎么会错都不敢讲的理论，按本书自己在第二十三章要给出的判据，正是被自己封写的理论。

编一 先在的六次立法

本编处理发现派。

要立刻声明一个态度，否则本编会被读成一份控诉状：本编不认为这六个人错了。六次操作，每一次都在当时解决了一个真问题，每一次都是那个位置上能做出的最好的一手，而且其中至少两次（欧几里得与康德）是人类思想史上罕有的成就。本书对他们的判断只有一条，而且是结构性的、不是评价性的：

六次操作有一个共同的语法：它们都只问“这个对象从哪来”，从不问“它怎么被接住”。

问“从哪来”的人，会去为对象找一个来源——理念世界、公理系统、天赋、主体形式、第三领域、数学直觉。六个答案彼此打架，但它们是同一个问句的六个答案。而“怎么被接住”这个问句，两千五百年里没有人在这场争论中提出过。它被划给了教育学，而教育学又向哲学要地基，于是这个问句在两边都无家可归。

本编的任务，是把这六次操作各自的动作指认出来——不是复述他们的学说，是指出他们在“把链的终点搬到起点”这件事上，各自做了哪一步。

第一章 柏拉图：把产物摆到起点上

判断卡片：完美的三角形不是先在的理型，是一场光滑化的极限产物；柏拉图做对的是看见它不等同于任何一个画出来的三角形，做错的是把这个产物当成了起点，并因此不得不为它另设一个世界。

一、他看见的那件事是真的

柏拉图说，我们在纸上画的每一个三角形都不完美：线有粗细，角有偏差，边未必真直。可我们心里却分明有一个“完美的三角形”——三边绝对直、三角精确、不带一丝多余的物质。既然这个完美三角形从未在经验世界里出现过，它必定存在于另一个地方：理念世界。它先在、永恒、不变，是一切经验三角形所“分有”却不可企及的原型；而学习，就是灵魂对这些理型的回忆（anamnesis）。

必须先承认这套学说的巨大吸引力，否则就谈不上理解它。它解决的是一个真问题，而且是当时无人能解决的真问题：几何命题的必然性从何而来？你量一千个三角形，得到的是一个千个近似值；可“内角和为两直角”不是一个近似的经验概括，它是必然的。经验给不出必然性，这是休谟两千年后才把它说到极致的一件事，而柏拉图在两千年前就感到了它的压力。把必然性安放进一个非经验的、永恒的世界，是一个极自然、也极有力的解释。

而且他做对了一件极要紧的事：他看见完美三角形不等同于任何一个画出来的三角形。这不是废话。一个粗糙的经验主义者会说“完美三角形就是把所有三角形平均一下”，那是错的——平均一千个歪三角形，得到的是一个歪得比较均匀的三角形，不是一个完美的三角形。柏拉图看穿了这一点。

二、他做错的是方向

发生学给出一个不同的读法。

那个“完美的三角形”，并不是一个先于一切、住在别处的理型；它是一场光滑化的极限产物。人在一次次画三角形、比较三角形、修正三角形的过程里——一条差异路径，在真实的作图与度量的土壤中——把每一个具体三角形的“毛刺”（这一个的边略弯、那一个的角略偏）一层层磨去，磨到极处，涌现出一个不含任何具体缺陷的“三角形本身”。这个被磨到极限、不再带任何偶然瑕疵的同一性，就是“完美的三角形”。

它确实不在经验世界里——因为它正是把经验世界里所有三角形的差异磨光之后才涌现的东西，是一个理想化的极限，而不是一个现成的实例。

于是柏拉图做对了一件事，也做错了一件事。做对的是：他敏锐地看到，完美三角形不等同于任何一个画出来的三角形。做错的是方向：他把这个光滑化的产物，当成了先在的起点，并因此不得不为它另设一个永恒的世界，再把真实的、正在发生的经验三角形，贬为它的残缺摹本。

这正是本书要追踪的那个根本颠倒的形而上学原型——把成熟态当作起点——只不过被放大到了整个宇宙的尺度：不是“5 本来就在那儿”，而是“完美的形式本来就在理念世界那儿”。

三、《美诺篇》：同一段文字的两种读法

把这一点落到教育上，就是《美诺篇》里那个著名的场景。

苏格拉底向一个没学过几何的奴隶男孩发问，一步步引着他"想起"了把正方形面积加倍的作法。柏拉图用它证明：知识本就在灵魂里，学习不过是回忆。这几乎就是发现学教学观的原始版本——知识先在，教学是揭幕。

可只要换一个方向去看那同一段对话，就会发现另一件事：苏格拉底没有把任何一个现成答案递给男孩。他做的全部，是用一连串问题给男孩制造缺口、逼出张力、再陪他一步步走通那条路——男孩最后"想起"的东西，恰恰是在这段对话里、第一次在他身上发生出来的。特别值得注意的是那个中间环节：男孩先给出一个错误的答案（把边长加倍），苏格拉底不纠正，而是让他自己撞见结果不对（面积成了四倍）。那一撞，才是整段对话的正身。一个回忆是不会先回忆错的。

美诺的奴隶男孩，既是发现学"回忆说"的奠基场景，也是发生学"引发一再发生"的奠基场景；同一段文字，两种读法，分野只落在一件事上：那个几何洞见，究竟是从灵魂深处被回忆起来的，还是在提问的张力里被重新发生出来的。本书主张后者。

四、他自己留下的那个解不开的难题

这个方向上的颠倒，还给柏拉图自己留下了一个终生没能理清的难题：经验里那些不完美的三角形，究竟是怎样"分有"（methexis）那个完美三角形的？

一个住在别处、自我完足的理型，与此处这一个歪歪扭扭的图形之间，那条"分有"的纽带始终说不清楚。柏拉图晚年在《巴门尼德篇》里，自己就把它逼到了"第三人"的无穷倒退：如果这个三角形与理型三角形因为共有某种性质而相似，那么这种共有的性质又需要一个更高的理型来解释，如此以至无穷。

从发生学看，这个难题之所以无解，是因为它本就是那次颠倒造出来的假问题：完美三角形并不是一个高踞别处、供经验三角形去摹仿的独立实体，它就是这条经验三角形序列被磨到极限时涌现出来的同一性。产物与过程之间，根本不需要一条神秘的"分有"纽带——因为产物本就长在过程的尽头。把起点与产物摆正，难题自行消失。

这里要记一笔，编五还会用到：一个理论若产生出自己解不开的假问题，且这个假问题恰好出现在它做了颠倒的那个位置上，那么这个假问题本身就是颠倒的证据。本书在编五第二十五章会用同一把尺子量四组老对峙，量出来的结果是一样的。

五、公道话：他捅穿了，但没有改

必须补一句对柏拉图的公道，也必须补一句对他的严格。

公道在于：他是第一个把刀捅进自己学说心脏的人。《巴门尼德篇》里那三刀（分有困难、第三人无穷倒退、理念论若成立则理念恰不可知），是柏拉图自己下的，不是后人下的。这在思想史上是罕见的诚实。

严格在于：捅穿不等于让伤口改变后续。柏拉图捅了，不缝，也不改——《蒂迈欧篇》里理念论照旧跑。这一区分在本书编二第十二章还会用到一次，那里有一个把刀捅进自己心脏、并且据此重造了整套工艺的人，两者不可混同。

六、原始文本细读：《美诺篇》里那两次答错

把那段对话逐步走一遍，会看到一件柏拉图自己没有说、而文字留下了的事。

苏格拉底在地上画一个正方形，边长二尺，面积四平方尺。问：要一个面积八平方尺的正方形，边长该是多少？

男孩答：四尺。理由是面积翻倍，边长也翻倍。苏格拉底不纠正，只让他算：四尺见方是十六平方尺。男孩看见了，说这不对。

男孩再答：三尺。这一次的理由与上一次完全不同——他知道答案在二和四之间，于是取中间。苏格拉底还是让他算：三尺见方是九平方尺。男孩再次看见不对。

到这里，男孩说了那句话：我真的不知道了。

然后苏格拉底才在正方形上画出对角线。

请注意这段文字里发生了什么。男孩答错了两次，而且两次的错法不同：第一次是线性直觉（翻倍就翻倍），第二次是折中猜测（在两个已知不对的数之间找）。这两次不是杂音，它们是一条路径的两个落脚点——第一次撞掉了“倍数关系可以直接搬”，第二次撞掉了“答案是一个整数”。两次撞完，那个位置才空出来，对角线才能落进去。

而柏拉图在对话结束之后的解释里，把这两次错完全略过不提。他保留的只有最后那个正确的洞见，并称之为回忆。

这是本书能找到的、这道工序最早的一次现场记录：土壤（两次真实的困惑）与路径（两次撞错）就在同一篇文字里，写得清清楚楚，而作者本人在总结时把它们磨掉了，只留下一个光滑的显露——灵魂本已知道。

一个回忆是不会先回忆错两次的，更不会两次错法不同。

七、一处对本书不利的读法

必须处理一个有力的反读：苏格拉底的提问本身已经把答案编码进去了。是他画的对角线，不是男孩想出来的；整段对话的路线由他控制，男孩只是被牵着走完了一条预设的路。按编五第二十七章的判据，这不正是“预设答案的探究”，也就是伪发现吗？

本书让步一半。引导是真的，对角线那一步确实是苏格拉底给的。若柏拉图的结论是“男孩自己发现了这个作法”，那么这个反读成立，本书也不替他辩护。

但另一半不让步，而且这一半正是本书的形状。编六第三十二章那一节写明：困境由教师精心设计并摆出来，路径的落脚点由教师铺好，结论由教师明确地讲——改变的只有它讲在什么时候。按这个标准回头看那段对话：

- 困境由苏格拉底摆（面积八的正方形）——应当如此。
- 落脚点由苏格拉底铺（“你算算看”）——应当如此。
- 对角线由苏格拉底给——应当如此，而且他给得很痛快，没有搞“你们再想想”。
- 而“算一算四乘四”“算一算三乘三”，以及撞见那句“我真的不知道了”——这三步是男孩自己走的，谁也替不了。

那三步就是这段对话里不可代办的部分，而它恰恰是柏拉图在总结时略去的部分。

于是这个反读非但没有推翻本章，反而把本章的判断说得更准：问题不在苏格拉底怎么做的，问题在柏拉图怎么讲的。做的那个人做对了；讲的那个人，把做对的那一半磨掉了。

八、这一章在全书里的位置

柏拉图的操作，是本书要追踪的那道工序的第一次形而上学化。他没有发明光滑化——光滑化是一件在任何知识传承中都会自动发生的事，第十七章会论证它甚至是文明得以积累的前提。柏拉图做的是：给光滑化的产物颁发了一张出生证明，上面写着“先在”。

有了这张证明，后面五次立法才有可能。第二章那位不谈哲学，他只做了一件事——把这张证明做成了一台机器。

第二章 欧几里得：把次序做成机器

判断卡片：《几何原本》最深远的影响不是它的哪一条定理，是它的次序——它把发生链的终点（定义与公理）摆到第一页，并使这个摆法成为此后两千三百年“什么叫一本数学书”的唯一标准。光滑化在这里第一次从一种呈现方式变成了一台制度机器，此后不需要任何人再决定一次。

一、一个从来不被当作教育学人物的人

欧几里得不谈知识论，不谈学习，不谈数学对象的出身。他写了一本书。

正因如此，他在这场争论里几乎从不被提起——发现派不引他，发生派也不批他。而本书要论证的是：在这道工序的全部历史上，他是影响最大的一个人，比柏拉图大，因为柏拉图给的是一张证明，他给的是一台机器；证明需要有人相信，机器不需要。

《几何原本》十三卷，开篇是二十三条定义、五条公设、五条公理。然后是命题一：在一条给定线段上作一个等边三角形。然后一路推下去，四百六十五个命题。

这个安排今天看来毫不特别，那正是问题所在——它之所以看起来毫不特别，是因为它赢了。

二、那个次序是什么的次序

请注意一件事：欧几里得的次序，与希腊几何被造出来的次序，几乎完全相反。

希腊几何是从测量、作图、天文、以及一连串具体难题里长出来的。毕达哥拉斯学派撞上不可公度量（正方形的对角线与边长不可通约）时，那是一场危机，不是一条定理；欧多克索斯的比例论是为了收拾这场危机而造的工具。倍立方、化圆为方、三等分角这三大难题，是几何在两百年里的真实推进力。这些困境、这些失败、这些为收拾残局而临时打造工具，构成了希腊几何的土壤与路径。

《几何原本》里，它们一条都没有。

不可公度量在第十卷以一套已经磨得极其光滑的无理量分类出现，读者完全看不出这里曾经塌过一次天。欧多克索斯的比例论在第五卷以定义五那个著名的、极其精妙也极其难懂的形式出现，读者完全看不出它是被什么逼出来的。土壤被磨掉了，路径被磨掉了，只剩下结晶。

而结晶被摆在了第一页。

三、为什么这不是批评

这里必须停下来说清楚，否则整章会被读反。

欧几里得那样安排是对的。对于他要做的这件事——把当时全部已知的几何整理成一个可检验、可传承、无隐藏假设的整体——公理化次序是唯一的办法，而且是一个了不起的办法。它做到了三件此前没有人做到的事：

其一，它使隐藏的假设浮出水面。一旦要求每一步都从明写的前提推出，那些“大家都觉得显然”的东西就必须被写下来，于是有了第五公设——而正是因为它被明确写了下来，两千年后才有人能够去动它，才有非欧几何。一个没有被写出来的假设是不可能被推翻的。

其二，它使知识可以被外部核查。你不必信任欧几里得，你只需要检查每一步。这是数学与几乎一切其他知识形态的分水岭。

其三，它使知识可以被完整搬运。整本书可以抄写、翻译、跨越语言与文明传下去，而不损失任何东西。《几何原本》是人类历史上被印刷次数仅次于《圣经》的书，这不是偶然——它是那个时代最好的存储格式。

所以本书对欧几里得的判断不是“他做错了”，而是一句更麻烦的话：

他做的是一件存储与核查的工作，而这件工作的产物，被后世当成了教学的次序。

四、格式的僭越

一个东西最适合被保存和搬运的形态，未必是它最适合被一个新学习者接住的形态。这两件事在《几何原本》这里第一次分了岔，而且岔开之后从未被合拢。

真正发生的事是：因为《几何原本》是最好的存储格式，它就被当成了唯一的呈现格式；又因为它是唯一的呈现格式，它就被当成了唯一的教学格式。这个滑坡在历史上没有任何一处有人做过决定——它是自动发生的，就像水往低处流。

结果是：此后两千三百年，“一本数学书应该长什么样”这个问题有了一个不容置疑的答案。定义、公理、定理、证明、推论。中世纪的四艺如此，近代的教科书如此，今天小学三年级的数学课本仍然如此——“分数是把单位 1 平均分成若干份……”，这一句的语法结构与“点是没有部分的东西”完全相同。

这就是本书所说的“制度化”。光滑化在柏拉图那里还是一个哲学主张，需要有人相信；在欧几里得这里变成了一个格式，不需要任何人相信。一位从不读柏拉图、也不关心数学对象是否先在的小学教师，只要她按课本上课，她就在执行这道工序。机器不需要信徒。

五、一处必须承认的复杂：他自己也许知道

有一个细节值得记下，因为它对本书是不利的证据，不能藏。

普罗克洛斯记载了一则轶事：托勒密问欧几里得有没有比《几何原本》更短的学几何的路，欧几里得答，几何无王者之路。这则轶事通常被引作“学习要下苦功”的格言。但它还可以这样读：欧几里得知道，读他的书不等于学会几何。王者之路问的是能不能省掉过程，而他的回答是不能。

如果这个读法成立，那么欧几里得本人并没有把《几何原本》当成教学法，是后世把它当成了教学法。这对本书的判断有一个修正：这道工序的制度化不是他做的，是他的成功做的。一件东西一旦成为标准，它就不再需要它的作者同意。

本书采纳这个修正，并在此立一条贯穿全书的判断：

光滑化的每一次制度化，都不是由某个人决定的，而是由某个成功决定的。

编三第十九章讲布尔巴基时，这条判断会以更锋利的形态再出现一次；编四第二十三章讲封写时，它会以第三种形态出现——那时它已经不在制度里，而在一个人的底盘上。

六、原始文本细读：第一卷第一个命题就用了一个没写出来的假设

《原本》第一卷命题一：在一条给定的有限直线上作一个等边三角形。

作法是这样的：以线段两端为心、以该线段为半径各作一圆；两圆交于一点；把这一点与两端相连，得等边三角形。

证明完美无缺——除了一处。

“两圆交于一点”这件事，五条公设里一条也没有保证。公设说的是：可以画直线、可以延长、可以以任一点为心任一距离为半径画圆、直角都相等、以及那条著名的第五公设。没有一条说，两个这样摆放的圆必定相交。

这个缺口后来被称作连续性问题，它要求平面上没有“洞”。补上它，是两千两百年后希尔伯特那套公理系统的工作之一。

请注意这件事的形状。一部以“把隐藏的假设明确写出来”为纲领的书，在它的第一个命题上，就用了一个没写出来的假设。

这不是欧几里得的疏忽，说他疏忽是廉价的。这是那个纲领的边界，而边界的位置很值得记：

你只能写出你看得见的假设；而看不见的那些，恰恰是被走通了太多遍、已经沉进地基的。

“两个圆当然会交”这件事，对任何一个画过圆的人来说是不假思索的——它熟到了不产生任何信号的程度。编四第二十三章那张表里“死于成功”那一行说的正是这个形状，只是这里它发生在一部书上，而不是一个人身上。

于是《原本》同时演示了那台机器的力量与它的限度：它把大量隐藏假设逼上了台面（第五公设因此可以被推翻），而它逼不出那些已经沉得太深的。

七、一处对本书不利的读法

一个来自教育史的反读，而且它相当有力：这一章把《原本》的教学影响夸大了。

事实是：中世纪与近代早期真正的数学教育，大量依赖算书、商用手册、师徒传授与口诀，《原本》主要是精英与大学教育的一部分；许多学过算术的人一辈子没翻过它。把两千三百年的教学次序全部记在它头上，不成比例。

本书接受这个修正，并据此把判断收窄一格。

《原本》确立的不是唯一的教学实践，而是一个标准：什么叫一本正规的数学书。而教科书的次序，恰恰是从这个标准来的，不是从课堂实践来的——一本要被认可为“正规”的数学教材，必须以定义开篇；一位教师即使自己上课时先摆困境，他手里那本书仍然是定义在前。

这个收窄有一个可核对的推论：在那些不受“正规数学书”标准约束的地方，光滑化应当更弱。算书与商用手册往往从一个具体问题起头（某人若有若干货物，如何分账），而不是从定义起头——这与本书的预测一致。

所以这个反读不是反驳，它是把本章那台机器的作用位置指得更准了：它装在“什么算一本书”上，不是装在“教师怎么讲课”上。而前者比后者更难松动，因为它不需要任何人同意。

八、这一章在全书里的位置

欧几里得给了这道工序一副身体。此后它不再需要哲学的支持，也不再需要任何人的赞成——它只需要一本又一本按同一格式写下去的书。

但机器有一个缺口：它不解释学习者。你把结论摆在第一页，读者读到了，然后呢？他凭什么读得懂？这个缺口在两千年里一直空着，直到有人不得不去填它——而填法有两种。第三章那位选了第一种：既然来路被磨掉了，那来路一定在别处，在灵魂里。

第三章 笛卡尔与天赋观念：把来路搬进灵魂

判断卡片：天赋观念不是一条关于心灵的发现，是一张必须开出的收据——当一个对象的来路在呈现中被磨掉之后，“我究竟是怎么知道它的”这笔账仍然要平；天赋观念是这笔账在近代的第一张收据，而它把来路记在了灵魂名下。

一、缺口是怎么出现的

上一章结尾留了一个缺口：机器不解释学习者。

这个缺口在中世纪不成为问题，因为那时有一个现成的答案——知识来自权威与启示，个人不必解释自己怎么知道。近代把权威拆了，缺口就露了出来，而且立刻变成一个尖锐的问题：如果我不能靠权威，我凭什么说我知道？

笛卡尔面对的正是这个缺口。而他面对它的方式，在本书看来有一个极其重要的特征：他从已经成形的知识出发倒着找。

他手上有什么？有几何——那时的几何就是《几何原本》，二十三条定义、五条公设、四百六十五个命题，光滑、自足、必然。他要问的是：我这个人，凭什么能够拥有它？

请注意这个问句的形状。它不是“几何是怎么长出来的”，它是“我怎么会已经有了它”。问句的形状由手上那件东西的形状决定——他手上那件东西看不出来路，所以他的问句里也不可能有来路。

二、天赋观念是一张收据

于是有了天赋观念。三角形的观念、上帝的观念、广延的观念，不是从感官来的（感官给的都是不完美的、变动的），也不是我编造的（我编造不出必然性），所以它们必定是与生俱来的，是上帝在创造我时就放进我心里的。

本书要指出的是：这是一次完全合乎逻辑的推理，而它的前提是错的。

推理是：这个东西不可能从经验来（真）；它也不可能是我随便编的（真）；所以它必定原本就在我里面（不成立）。

不成立的地方在于，这个选言支不完全。还有第四种可能，而这第四种可能在笛卡尔的视野里根本不存在：它可以是在一段真实的经验路径中被逐步磨出来的，其产物既不是任何一次经验的复制（故不是从经验来的），也不是随意的（故不是编的），而是那条路径被走通之后必然结晶出的形。

这正是第一章说的那件事——完美三角形是一场光滑化的极限产物。它不在任何一个经验三角形里，但它也不在灵魂里；它在那条把三角形一个个磨过去的路径的尽头。

所以天赋观念的结构是：当来路被磨掉、而账又必须平的时候，来路就被记在了唯一还剩下的那个户头上——灵魂。

三、一个更狠的说法

可以把上一节的判断说得更狠一点，因为它对编五有用。

笛卡尔与柏拉图开的是同一张收据，只是户头不同。柏拉图记在理念世界名下，笛卡尔记在灵魂名下。两个户头都在经验之外，两张收据都是为了平同一笔账——那笔账的名字叫“必然性从哪来”，而它之所以成为一笔账，是因为产生必然性的那条路径在呈现中被抹掉了。

于是本书得到编一的第一条横向判断：

发现派的每一次立法，都是在为同一笔被抹掉的账找一个新户头。

第四章会看到这个户头搬到了主体的形式那里，第五章会看到它搬进一个既非物理也非心理的第三领域，第六章会看到它搬回了一种类似感知的数学直觉。四次搬家，账目一分未变。

四、洛克的反手，和它为什么不够

必须处理经验论一侧，否则本章会显得只打一边。

洛克对天赋观念的批评是有力的：如果观念是天赋的，为什么儿童与“未开化者”没有它们？为什么它们需要被教？他提出白板说，主张一切观念来自经验，经由感觉与反省。

这一击打中了天赋观念的软处，但它没有解决问题，反而把问题交还给了对方。因为经验论必须回答：感觉给的是这一个、那一个的具体印象，必然性从哪来？休谟把这个问题推到了极致，得出了那个著名而令人不安的结论——它不从任何地方来，我们只是习惯了。

本书要指出，经验论的失败与唯理论的失败同源：

两派都把“经验”理解成一堆被动接收的印象，而不是一条被走出来的路径。

在这个理解下，从印象里当然长不出必然性——一千次看见太阳升起，得不到“必然升起”。但如果经验是一条有推进、有承接、有修正、有收敛的路径，情况就不同了：一个孩子把三角形的三个角撕下来拼成一条直线，再换一个三角形拼一次、再换一个，他得到的不是“到目前为止都是 180° ”这样一个归纳，而是撞见了那个拼法为什么必然成功的理由——两条平行线间的内错角。他手里那条路径本身携带着必然性，而不是靠次数累积出必然性。

必然性不在印象里，也不在灵魂里，在路径里。这是本书对唯理论—经验论之争的处理，编五第二十六章会把它写成可裁决的形式。

五、一处不利于本书的证据

诚实起见，记一处对本书不利的地方。

笛卡尔本人是一位杰出的、有创造力的数学家。解析几何是他造出来的，而且他自己完整地知道那是怎么造出来的——他在《几何学》里几乎是一边走一边写，那本书的写法与《几何原本》完全不同，充满了“我们可以这样试”“如果这样设”。

一个亲手造过数学的人，仍然提出了天赋观念。这说明本书那句“来路被磨掉了所以他看不见来路”不完全够用：他看得见自己那一条来路，他仍然认为几何观念是天赋的。

本书的应答是：他看见的是自己造一个工具的来路，而他要解释的是几何观念本身的必然性——在他那里，这是两件事，而且前者被他归入“方法”，后者归入“形而上学”。他的《方法谈》与他的《第一哲学沉思集》之间那道墙，正是本书全部工作要拆的那道墙。一个人可以在方法上是发生论者，在本体论上是先在论者，且不觉得自己自相矛盾——因为这两件事在他的框架里根本不在同一个抽屉。

这一处对本书不利，因为它说明“看不见来路”不是充分解释。真正的解释在编四：看得见某一次来路，与相信这类对象一般而言有来路，是两回事；后者是一条元层的规则，而元层的规则不由某一次经验改写。第二十一章会正面处理这一点，笛卡尔是那一章最好的例证。

六、原始文本细读：同一个人，两本书，两种口径

把笛卡尔的两本书并排放，会看到本书要拆的那道墙第一次被明确地砌起来。

《几何学》（1637）的开头是操作性的：一切几何问题都可以化归为若干线段的长短，因而只需要加、减、乘、除、开方这几件事。接下来整本书都是这个调子——设这条线为 x ，设那条为 y ，于是这个问题变成那个方程。这是一段工序。他一边写一边写，写的是“可以这样试”“如果这样设”。

《第一哲学沉思集》（1641）第五沉思讲同一类对象，口径完全不同：我心中有三角形的观念，它有确定的、不变的、永恒的本性；这个本性不是我造出来的，也不取决于我的心灵——因为我可以证明出许多我此前从未想到过的性质。

同一个人，同一类对象，相隔四年，两种口径，而他自己不觉得矛盾。

为什么不觉得？因为在他那里这是两个抽屉：《几何学》回答的是“我怎么解题”，属于方法；《沉思集》回答的是“这个对象是什么”，属于形而上学。两个抽屉之间不通信。

而请注意《第五沉思》那个论证的实际形状：他说三角形的本性不是我造的，理由是我可以证明出我此前从未想到过的性质。

这个理由是真的，而且它是一个极好的观察——但它证明的是：那个对象一旦被立起来，它的后果就不由我随意支配。这一条与“它是被造出来的”完全相容：一副棋的规则是人定的，而定完之后，某个残局是不是必胜，就不再由定规则的人说了算。从“后果不由我支配”推不出“起点不是我立的”。

本书全书要拆的正是这两个抽屉之间那道墙，而它在笛卡尔这里第一次被清清楚楚地砌起来。一个人可以在方法上是发生论者、在本体论上是先在论者，且不觉得自己自相矛盾——因为这两件事在他的框架里根本不在同一个格子里。

七、一处对本书不利的读法

笛卡尔的辩护者有一个相当精确的回应，本书必须处理。

他们指出：笛卡尔并不主张三角形观念的内容是天生印在心里的；他在回应质疑时说得很清楚，所谓天赋，指的是一种倾向或能力——就像我们说某个家族天生有某种疾病的倾向，不是说婴儿一出生就带着那个病。天赋的是形成这类观念的能力，不是观念本身。

这个读法比本章正文更精确，本书接受它。

但它不改变本章的判断，理由很直接：无论天赋的是内容还是能力，那笔账都记在了同一个位置——认识者一侧那个不再被追问的地方。

把两种读法并排：

- 粗读法：三角形的观念本来就在我心里。→ 账记在观念上。
- 精读法：形成三角形观念的能力本来就在我心里。→ 账记在能力上。

两者都回答了“我怎么会知道”，两者都把答案安放在一个不再需要来路的东西上，两者都不问“这个能力是怎么长出来的”。而第三种可能——那个能力本身是在一段真实的作图与比较的路径中被磨出来的——在两种读法里都不存在。

顺带说，精读法反而使本书的判断更强了一点。因为“能力”比“观念”更难被经验反驳：洛克可以问“为什么儿童没有这个观念”，却很难问“为什么儿童没有这个倾向”——倾向是可以尚未显现的。按编一第四章那条判断，这是同一次撤退的提前预演：每退一步，先在被守得更牢，而守牢的代价是它更不可追问。

八、这一章在全书里的位置

笛卡尔把账搬进了灵魂。这个户头有一个致命的弱点：它经不起洛克那样的经验质问，也经不起儿童发展的事实。所以它守不住。

下一位要做的，是把这个户头搬到一个洛克打不着的地方——不是搬进灵魂的内容，是搬进主体的形式。那是发现派最精致的一次撤退，也是最成功的一次。

第四章 康德：把先在从世界搬到主体

判断卡片：先天综合判断是发现派最精致的一次撤退——它把“对象先在”改写为“形式先在”，从而不再需要另一个世界。这一手极其成功，代价是它把那道工序的产物提升为一切经验的条件，于是从此以后，这件产物在原理上不可能再被追问来路。

一、他解决的是一个真的、且当时无解的问题

康德面对的局面是这样的：唯理论说必然性来自天赋，被洛克打了；经验论说一切来自经验，被休谟推到了“必然性只是习惯”这个谁也不能接受的结论。而与此同时，欧几里得几何与牛顿力学摆在那里，它们既是关于世界的（有内容，不是同语反复），又是必然的（不是靠归纳凑出来的）。

这样的知识存在，而两派都解释不了它的存在。这就是康德那个著名问句的处境：先天综合判断如何可能？

他的回答是一次真正的重新接线，而且是哲学史上最漂亮的几次之一：不是我们的认识去符合对象，是对象要符合我们的认识形式。空间与时间不是世界里的东西，是我们直观的形式；因果、实体这些范畴不是从经验读出来的，是知性给经验立法的形式。所以数学与物理才既有内容又必然——它们说的是一切可能经验必须服从的形式，而这形式是我们自己带来的。

这一手同时解决了两边的困难。天赋观念的内容问题没有了——康德不说三角形的观念天生在你心里，他说空间这个直观形式是你带来的，三角形是你在这个形式里构造出来的。休谟的问题也解决了——必然性不是从经验归纳出来的，它是经验之所以可能的条件。

这是发现派两千五百年里最好的一手。本书对它没有任何轻慢。

二、撤退的确切位置

但这是一次撤退，而且撤退的位置很关键。

柏拉图说：对象在别处，先在。

笛卡尔说：观念在灵魂里，先在。

康德说：形式在主体里，先在——而对象本身（物自体）我们碰不到。

一路后退：从世界，到灵魂的内容，到主体的形式。每退一步，都躲开了上一轮的攻击；每退一步，“先在”这件事被守得更牢。到康德这里，它被守到了一个几乎攻不破的位置——因为它不再是一个关于“有什么东西”的主张，而是一个关于“什么使经验成为可能”的主张。你不能用经验去反驳一个关于经验之条件的命题，这正是先验论证的力量所在。

本书的判断是：“先在”在康德这里被守住了，代价是它被守到了一个不可追问的位置。

三、代价：产物被提升为条件

代价的确切形状是这样的。

本书主张，那种“数学对象本来就在”的感受，是一场光滑化的产物——它有来路，且来路可以被指认（编三、编四整整两编在做这件事）。而康德的做法，是把这类产物提升为一切经验的先天条件。一旦提升完成，追问它的来路在语法上就不成立了：你怎么能追问那个使一切追问成为可能的东西的来路？

这不是康德的疏忽，这是他的方案的必然结果，而且在他的框架里是正确的。但它有一个后果，而这个后果本书要负责指出：

凡是被提升为条件的东西，都获得了一层免于被追问来路的豁免；而一件产物一旦获得这层豁免，它与一件真正先在的东西在效果上就无法区分了。

这句话在编五第二十七章会成为改判"先天／后天"这组对峙的主刀。

四、非欧几何这一记

康德的方案在十九世纪挨了实打实的一击，这一击必须完整写出来，因为它是本书全部论证里最硬的一处历史证据。

康德把欧氏空间当作直观的先天形式——不是我们发现空间是欧氏的，是我们只能这样直观。这在当时是一个极有说服力的主张：你试试看能不能想象一个三角形内角和不等与两直角。

十九世纪二三十年代，罗巴切夫斯基、鲍耶、以及私下里的高斯，做了那件被认为不可能的事：他们把第五公设换掉，推出了一整套自治的几何。半个世纪后，黎曼的框架把它们收进一个更大的家族；再半个世纪，广义相对论用上了其中一支来描述真实的时空。

请注意这一击落在什么位置上。它不是说康德的逻辑错了，是说他误判了什么是形式、什么是内容。他把一件历史产物（欧氏几何，一件由古希腊的作图实践、由第五公设那个具体选择长出来的东西）当成了直观的先天形式。而它之所以显得像先天形式，恰恰因为——它已经被磨了两千年，磨到"想象不出别的样子"。

"想象不出别的样子"，正是光滑化完成的标志，而康德把它当成了先天性的证据。这是本书从历史里能拿到的最好的一个证据，因为它是可裁决的：先在论者在一个具体的、可查的点上，把一件产物误判为了条件，而且这个误判后来被推翻了。

五、公道：他自己给了本书一把刀

必须说一句极重要的公道话——康德在另一处，给了本书全书最有用的一个工具。

在《纯粹理性批判》的先验辩证论里，康德提出了先验幻相（transzendentaler Schein）：理性在超出经验界限使用范畴时，会产生一种幻相，而这种幻相不可避免，即使被识破也不会消失，就像视觉错觉一样。他坚持，哲学的任务不是消除它，而是揭示它、并防止我们被它欺骗。

这是一个了不起的思想动作：承认存在一类"看起来必然、实则是我们自己产生的"的东西，并且承认识破它不等于摆脱它。

本书编四要提出的东西，与它同名而异质。本书称之为先验的虚幻：一种具备先验之全部外观、实则由一段具体教学史习得的自明感。两者的分界必须当场划清，第二十二章会做一张完整的对照表，这里先说要点：康德的幻相源于理性自身的结构，故不可避免、不可消除；本书的虚幻源于一段可指认的传递史，故可测量、可解锁、且解锁办法可以写成课堂工序。

本书借康德的名，是为了指出一件他不曾考虑的可能：有一类"先验感"不是理性的结构，而是教育的沉积。这个判断如果成立，它并不推翻先验哲学，只是从后者手里划走一块地皮——一块此前被默认属于理性结构、实际上属于传递史的地皮。这块地皮有多大，本书不作估计；本书只主张，小学数学课堂上那种"5 本来就在那儿"的自明感，落在这块地皮之内。

六、原始文本细读：一句心理学观察，被用作一个先验论证的前提

先验感性论里有一句关于空间的话，它是整套论证的枢纽，而它的形状值得逐字看：

我们绝不能表象空间之不存在，虽然我们完全可以设想空间中没有任何对象。

康德用它来证明：空间不是从经验中得来的概念，而是一切外部直观的必要的先天表象。

请把这句话拆成两半。

前半是一件关于我们的事实：我们表象不出没有空间的情形。这是一个心理学观察，而且是一个相当可靠的观察——任何人试一试都会同意。

后半是一个关于条件的命题：空间是外部直观的先天形式。这是一个先验的、非经验的断言。

从前半到后半，需要一个额外的步骤，而康德没有给。他实际上是把"表象不出"直接当成了"不可能"，再把"不可能"当成了"是条件"。

而按编四第二十二章那套机制，"我们表象不出"恰恰是加固完成的标志——一件东西被走通了足够多遍、磨得足够光滑之后，它就会显得想象不出别的样子。

这一句因此是全书最重要的一个证据点：一位第一流的哲学家，把光滑化完成的标志，当作了先天性的证据。而这一处不是本书事后的诠释——它后来在历史上被实打实地检验了一次（本章第四节那记非欧几何），而检验的结果是：那件"表象不出"的事，可以被训练出来。今天一个学过双曲几何的学生，可以相当自如地在庞加莱圆盘里工作，那里三角形内角和小于两直角，而他并不觉得自己在做一件想象不出的事。

他表象得出来。差别只在于，他走过一条康德没有的路径。

七、一处对本书不利的读法

康德的辩护者有一个标准回应，而且它在康德的框架内是完全自洽的，本书必须正面处理。

他们会说：先验感性论说的不是心理学意义上的"想象不出"，而是任何可能经验的形式条件；非欧几何是逻辑上的可能性，不是直观上的可能性。你可以无矛盾地推演一套非欧的公理系统，但你在直观中把握到的空间仍然是欧氏的。两者不相干，故非欧几何没有击中康德。

这个辩护在康德的框架内成立，本书不主张它是错的。本书要指出的是它的代价，而代价可以精确地写出来：

这个辩护使那个命题免于任何经验反驳。

一旦"直观上的不可能"与"逻辑上的不可能"被分开，并且规定只有前者与那个命题相关，那么就不再有任何可能的经验证据能够触及它——因为一切可以被摆出来的证据，都会被划到"逻辑的"那一侧。

而"免于任何经验反驳"，正是本章第三节说的那层豁免：凡是被提升为条件的东西，都获得了一层免于被追问来路的豁免；而一件产物一旦获得这层豁免，它与一件真正先在的东西在效果上就无法区分了。

于是辩护成功，代价是它变成了不可检验的。

本书对此不作进一步的攻击，而是把它记在账上，并在编五第二十八章那张表里给它一个位置：这类命题落在"命题一侧"，本书全书对那一侧不作裁决。本书只主张一件窄得多的事：一个十岁的孩子觉得"三角形内角和是 **180** 度，这有什么好问的"，这件事不是先验条件，是被造出来的，而且它的制造过程可以被指认、可以被逆转。

至于康德关心的那些真正的先天形式——空间、时间、因果——是否也落在这块被造出来的地皮里，本书没有材料，明说不知道，也不打算猜。

八、这一章在全书里的位置

康德把"先在"守到了一个几乎不可攻破的位置，同时把追问来路这件事在语法上封掉了。发现派此后一百年基本安全。

但下一位要发动的攻击，来自一个完全不同的方向。他不问先在的东西在哪里，他问一件更麻烦的事：你们把"发生"当成一个心理过程，那它根本就不该进数学。这是发现派最强的一次进攻，而且它是对的。

第五章 弗雷格：把发生逐出数学

判断卡片：弗雷格的反心理主义是对发生论最强的一次攻击，而且它成立——数学命题的真值确实不依赖任何人的心理过程。本书不反驳它。本书指出的是，他证成的是“命题的真”，而争论的是“知识的来”；把后者划归心理学并逐出，等于宣布这个问题不存在，而它并没有因此不存在。

一、他要打的靶子

十九世纪后期，有一批人试图把数学奠基在心理过程上：数是在计数活动中形成的心理表象，算术定律是思维的规律。弗雷格在《算术基础》（1884）与《算术的基本规律》里，把这个主张打成了碎片。

他的论证极其锋利，而且今天仍然成立。举其中三条：

其一，心理表象是私人的，数不是。我心里的“5”这个表象和你心里的不是同一个东西——它们有不同的意象、不同的联想、不同的强度。但 5 是同一个 5。如果数是心理表象，“你我说是同一个数”这句话就没有意义，而数学的全部工作都依赖这句话有意义。

其二，数学命题的真值不随心理事实变化。就算全人类明天都开始认为 $2+2=5$ ， $2+2=4$ 仍然是真的。如果算术定律是思维的规律，它们就该是心理学定律，而心理学定律是可以有例外的、是被经验发现的、是随物种和个体变化的一——算术定律不是。

其三，也是最狠的一条：混淆了“某物是什么”与“我们如何认识它”。弗雷格反复说，我们必须把心理学的东西与逻辑的东西、主观的东西与客观的东西严格分开。北海里有多少水，不因为我怎么想而改变；数也一样。

这三条本书全部接受。不打折扣，不做保留。

二、为什么这是发现派最强的一次

前四次立法都在为“必然性从哪来”找户头，而户头一个比一个不好守。弗雷格做的是完全不同的事：他不找户头，他划边界。

他说：数学对象是客观的，但不是物理的（你摸不到 5），也不是心理的（它不在任何人心里）。它属于第三个领域——思想的领域，客观而非现实。它不需要被谁想着才存在，也不占据时空。

这一手的力量在于，它不再需要为知识的来源辩护。它把来源问题整个划到了数学之外。数学研究数学对象，认识论研究我们如何认识它们，心理学研究认识发生时脑子里在干什么——三件事，三个学科，各管各的。弗雷格明确说，追问一个数学概念是如何在个人心中形成的，与追问这个概念是什么，是两个完全不同的问题，把后者混进前者，是哲学的堕落。

这是一次极其干净的手术，而且它救了数学。二十世纪数学的严格化、逻辑与集合论的地基工作，都在这一刀之后才可能。本书对它没有任何异议。

三、本书的应答：他证成的与争论的不是同一件事

那么本书站在哪里？

站在一个很窄的位置上，而且必须把它说得极精确，否则就会变成一次对弗雷格的拙劣反驳。

弗雷格证成的是：数学命题的真值，不依赖任何人的心理过程。这条本书接受。

本书讨论的是：一个数学对象，如何从一个还没有它的人那里，变成一个有它的人那里的东西。

这两件事的关系，可以用一个类比说清楚。一份证明写在纸上，挂在墙上，谁来看都是它，一笔不差——这是它的客观性，弗雷格说的就是这件事。但“看懂这份证明”这件事，每个人都得自己用眼睛和头脑重走一遍，谁也替不了谁。证明可以封存，看懂不能代办。

弗雷格的手术把第二件事整个划到了数学之外，划给了心理学。这个划分在他的目的下是正确的、必要的。但它有一个后果：从此以后，“知识如何来到一个人身上”这个问题，在数学哲学里没有位置了。它被判为心理学问题；而心理学并不认为自己有义务回答数学对象的构成；于是这个问题在两边都无家可归——正是导论第三节说的那个局面。

本书要说的是：逐出一个问题，不等于解决它。那个孩子一周后说 $1/3$ 比 $1/2$ 大，这件事不因为弗雷格划清了界限而消失。

四、一处必须承认的力量：本书自己也在用他的刀

诚实地说一件对本书有约束的事。

本书全书都在使用弗雷格那条分界，而且离了它本书立不住。导论第七节那道挡板——“本书不主张数学命题的必然性是幻觉”——用的正是弗雷格的刀。如果没有“命题的真”与“知识的来”这条分界，本书关于“先验感是被制造的”这个判断，就会立刻滑向“数学真理是被制造的”，而那是本书明确拒绝的立场。

所以本书与弗雷格的关系不是对立，是分工：他守住了命题一侧，本书处理接收者一侧；两侧不能互相还原，也不能互相代替。一本主张“知识的到来是一个过程”的书，恰恰需要弗雷格那条线来保护它不滑进相对主义。

这一点在编五第二十八章改判“实在论／建构论”那组对峙时是决定性的：本书将论证，那组对峙之所以纠缠不清，正是因为双方都在同时谈论命题一侧与接收者一侧，而且换来换去自己不觉得。

五、一处对弗雷格不利、但不该由本书来打的地方

有一件事必须提一句，然后放下。

弗雷格的第三领域有它自己的困难：一个既非物理又非心理、不在时空中的领域，我们这些在时空中的生物如何与它发生关系？我们怎么“把握”一个不占时空的思想？这个问题在弗雷格那里没有回答，在后来的柏拉图主义者那里也一直是软肋——贝纳塞拉夫在1973年把它写成了一个著名的两难：一套令人满意的数学语义学（把数学命题当作关于抽象对象的真陈述）与一套令人满意的数学认识论（说明我们如何知道它们），二者似乎不可得兼。

本书不打这一处。理由是纪律性的：本书的判断只涉及接收端，不涉及数学对象的存在方式；用一个本书不打算解决的本体论难题去攻击对手，是不诚实的。此处记下，是为了让读者知道本书知道它在，而选择不用它。

六、原始文本细读：数被赋予给什么

《算术基础》里有一段追问，是本书最喜欢的一段弗雷格，因为它几乎就是一段发生学论证。

他问：数是被赋予给什么的？

一副扑克牌摆在桌上。我可以说这是一副牌，可以说这是四组花色，可以说这是五十二张。同一堆东西，同一时刻，同一位置，而数完全不同。

于是那个结论：数不可能是物的性质。如果一是这堆东西的性质，那么四和五十二也是，而它们互相冲突。数被赋予的不是那堆东西，是“一副牌”“花色”“张”这些概念。

这段论证极其漂亮，而且它是对的，本书完整接受。

但请注意它同时摆出了一件弗雷格没有接着追的事：决定数是几的，是“你按哪一种方式去切它”。

而“按哪一种方式去切”是一个动作。它不是那堆东西的性质，也不是我脑子里的一团意象——它是我可以做、可以不做、可以换一种做法的一件事，而且一个孩子必须真的做过几次，才拿得到它。

于是这段文字前面摆着三条路：

- 数在那堆东西里 → 弗雷格证明了这条不通。
- 数在我心里 → 弗雷格证明了这条也不通。
- 数依赖于那个切分的动作，而动作是可以被走的路径 → 他看见了这条路的入口，没有走，转身把数安放进了第三领域。

本书不主张他应该走第三条。他要解决的是数学命题的客观性问题，而第三条路在他那个问题上帮不了他——一个动作是个别的、有时间的、可以不做的，而他要的是必然的、无时间的、不可不然的。他转身是有理由的。

本书只指出一件事：第三条路的入口，在这段文字里是敞开的，而且它敞开的方向，正是编六第三十二章第一个案例的做法——让孩子把同一堆东西按不同的方式切几次，看着数在他手底下变。

七、一处对本书不利的读法

上一节有一个明显的把柄，必须自己交出来。

弗雷格的读者会说：这一节在偷换他的概念。他所说的“概念”是客观的、非心理的、不属于任何人的东西；把它读成“切分动作”，恰恰是把它心理主义化了，而反心理主义是他毕生的工作。按他的标准，上一节是一次典型的误读。

这个指控是对的，本书接受。并把话收窄到不能再窄：

本书不主张弗雷格的“概念”是一个心理动作。

本书只主张：在教学上，一个孩子要拿到“数被赋予给概念”这件事，唯一的办法是他自己切过几次。

前一句属于命题一侧，本书不裁决，而且按编一第五章第四节，本书靠他守着后门。后一句属于接收者一侧，是本书全书的题目。两句不冲突，因为它们不在同一侧——这正是编五第二十八章那张四格表要处理的事，而本节是那张表最好的一个标本：同一段文字，在两侧读出两件不相干的事，而混读会同时冤枉两边。

顺带记一笔，这也是本书为什么把弗雷格放在编一而不是编二。按他的立场他属于发现派；按他这段论证的形状，他离发生派只差一步。而他没迈那一步，不是因为他没看见，是因为他的问题不在那一侧。

编一那六位里，他是唯一一位本书完全不打算劝服的人。

八、这一章在本书里的位置

弗雷格把发生问题逐出了数学。这个逐出极其成功，以至于今天在数学哲学的主流文献里，“一个概念如何在一个人身上长出来”几乎不被认为是一个哲学问题。

于是发现派获得了它最稳固的形态：不再需要理念世界，不再需要天赋，不再需要主体形式——只需要一条边界。下一章那两位，一个在信念上、一个在工艺上，把这个形态推到了极限，然后在教室里第一次撞了墙。

第六章 哥德尔与布尔巴基：两个方向的极致，以及第一次撞墙

判断卡片：哥德尔在信念上、布尔巴基在工艺上，各自把发现派推到了极限；而正因为推到了极限，那道工序第一次露出了它的代价——不是在哲学论证里，是在小学教室里。新数学改革是发现范式两千五百年来第一次可被外部核查的失败。

一、哥德尔：把数学直觉写成一种感知

哥德尔是二十世纪最伟大的逻辑学家，也是一位毫不含糊的柏拉图主义者。这两件事在他那里不矛盾，而且他自己认为后者是前者的条件。

他的立场极其明确：集合论的对象是客观存在的，我们对它们有一种类似感知的把握。他甚至用了这个类比——数学直觉之于数学对象，如同感官知觉之于物理对象；我们没有理由更不信任前者。集合论公理强加于我们，因为我们能够看见它们是真的；连续统假设这样的问题有确定的答案，只是我们目前的公理不足以给出它。

请注意这一手做了什么。它把"必然感"当成了一种知觉证据。柏拉图靠回忆，笛卡尔靠天赋，康德靠形式条件，弗雷格靠划界——哥德尔靠看见。这是发现派在信念一侧能到达的最远处：不再论证对象为何先在，而是直接报告"我看见它了"。

本书对这一手的处理有两条，缺一不可。

第一条，他报告的经验是真的，而且本书预言它。一位在集合论里工作了三十年的数学家，那些对象对他而言的实在感，比大多数物理对象更强——这是可信的报告，不是自欺。按本书编三的论证，一门已经成熟、已被反复走通、且已在这个人身上被磨到不假思索的数学，落到他眼里必定显得是被发现的。柏拉图主义者所忠实报告的那种现象学，正是光滑化的现象学。分歧从来不在这种经验真不真，而在于要不要把"显得先在"直接当成"确实先在"。

第二条，这一手在方法上是不可裁决的。如果"我看见它是真的"可以作为公理的证据，那么当两个同样杰出的数学家看见了不同的东西（这在选择公理、大基数、连续统假设上反复发生），就没有任何程序可以裁决。哥德尔自己也承认这一点，他寄望于新公理的成效来间接裁决——而"看成效"恰恰是一条后验的、发生学的判据，不是直觉的判据。在最要紧的地方，最坚定的先在论者不得不借用发生论的尺子。这一处本书要记满账，编五第二十八章会拿它当主证据。

二、布尔巴基：人类史上最大的一次光滑化工程

如果说哥德尔把信念推到了极限，布尔巴基学派把工艺推到了极限。

从一九三〇年代起，这个法国数学家团体以彻底公理化的方式重写整个数学：从集合论出发，逐层建立结构，把每一个概念都呈现为逻辑上无缝衔接的光滑演绎。没有历史，没有动机，没有失败，没有一句"当年人们为什么会想到这个"。原则被贯彻到极致：一切从结构出发，一切按逻辑依赖排序。

在研究与存档的意义上，这是伟大的成就。它把数学的逻辑骨架擦得雪亮，它使二十世纪数学的统一成为可能，它培养了一整代极为出色的数学家。本书对它的价值没有任何贬低。

但它是最危险的教学诱惑，因为公理化顺序恰恰是发生顺序的完全倒置：公理是发生链最末端的结晶，却被摆到了最前端。这就是欧几里得那台机器的最终形态——两千三百年后，同一个次序被推到了它逻辑上的尽头。

三、第一次撞墙：新数学改革

然后是本书全书最重要的一段历史证据。

一九六〇年代前后，在苏联发射第一颗人造卫星带来的震动之下，多国推行了中小学数学课程的激进改革，通称新数学（New Math）。改革的思路直接来自布尔巴基一脉：既然现代数学的正确基础是集合论与结构，那么就应当把这套语言下放给儿童——从集合、映射、关系教起，从一开始就用严格的现代语言，而不是那些“不严格的”旧算术。

改革在多国推行了十来年，然后大面积失败。孩子们记住了交集、并集这些符号，会做维恩图，却与真实的数量世界失去了联系；家长辅导不了作业，教师自己也常常不理解为什么要这么教；基本运算能力下降。美国数学家克莱因写了一本《为什么约翰不会加法》来抨击它，这个书名本身成了那场失败的墓志铭。到七十年代，多数国家退了回去。

必须公正地说：这场失败有多个原因，师资培训不足、教材质量参差、推行过急都在其中，本书不主张一因论。但本书要指出那个结构性的原因，而且它正是本书的母题：

新数学把每一个概念赖以发生的粗糙土壤抹得比传统教学更干净，并把发生链最末端的结晶摆到了最前端。这是一次以“现代”“严谨”为名、实则加剧了光滑化的改革。

这一段之所以在全书里分量最重，是因为它的可裁决性。哲学争论可以无限进行，因为双方的证据都在对方的解释范围之内。新数学不一样：它是一次真实的、大规模的、有对照的、结果公开的干预，而且它的失败方向与发现范式的预测相反、与本书的预测一致。发现范式预测：把对象的正确形态更早、更严格地交给学习者，学习会更好。结果不是。

这是发现范式两千五百年来第一次在外部世界被核查，而且它没通过。

四、必须挡住的一个误读

这里立刻要挡一个误读，否则本章会被用来支持一个本书反对的结论。

新数学的失败不是“不该教严格的东西”，不是“孩子只需要具体不需要抽象”，更不是“讲授是错的”。

它是：次序错了。集合论语言本身没有问题，它是一件极好的东西；问题在于它被摆在了那些逼出它的困境之前。一个从来没有遇到过“这两堆东西怎么比多少”“这些对象怎么才算同一类”这些困境的孩子，拿到“集合”这个词，手里就只有一个词。

编六第三十章会把这一条写成一个正面的工序，而不是一句批评。

五、原始文本细读：一份把排除历史写成纲领的宣言

布尔巴基那群人在一九五〇年发表过一篇讲他们纲领的文章，题目是《数学的建筑》。那篇文章值得细读，因为它把本书要指认的那件事写成了明文。

三个要点。

其一，他们明确说，他们的排列次序是逻辑上的必然次序，与历史次序无关，而且这是优点。历史的路是曲折的、偶然的、被个人趣味与时代限制左右的；逻辑的路是唯一的。因此一部要经得起时间的数学著作，应当按后者排。

这不是疏忽。编三第十九章那条判断说“不是疏忽，是一个成功的决定被推到了逻辑的尽头”——这篇文章就是那个决定的白纸黑字。

其二，那个贯穿全文的比喻本身，就是本书要拆的东西。他们把数学说成一座建筑：有地基（集合论），有承重结构（母结构：代数结构、序结构、拓扑结构），有一层层往上盖的楼层。

请看这个比喻默认了什么。建筑的地基是最先造的——你不可能先盖三楼再补地基。于是"逻辑上在先"与"时间上在先"在这个比喻里被自动合并了。而实际情况恰恰相反：集合论是十九世纪末的东西，比它上面那些"楼层"晚了两千年。

这是把发生链的终点当作地基的最完整的一次修辞化，而且它做得如此自然，以至于此后半个世纪几乎没有人觉得这个比喻有问题。

其三，他们自己知道这不是发现的过程。那篇文章里也承认，数学家实际工作时不是这样进行的，直觉、类比、尝试都在其中。他们知道两个次序不同——他们只是判定，写下来的时候应当用后一个。

这一条把他们与编三第十六章那三位放在了同一件事的两侧：庞加莱、阿达马、波利亚知道两个次序不同，于是去写那个被抹掉的次序；布尔巴基知道两个次序不同，于是把抹掉写成了纲领。四个人都看见了同一件事，做出了相反的决定，而赢的是后者。

六、一处对本书不利的读法

布尔巴基的辩护者有一条相当有力的回应：新数学改革不是布尔巴基做的。

这是事实。那套书是写给专业数学家的，从来没有声称自己是中小学教材；而且那群人里有人公开反对把这套语言下放给儿童——迪厄多内那句关于欧几里得的著名口号确实煽动了改革者，但作为一个整体，那个学派并没有制定过任何一份中小学课程。把新数学的失败记在他们头上，不公平。

本书接受这一条，而且认为它重要。但它不改变判断，因为编二第五节那条贯穿全书的判断正是为这种情形准备的：

光滑化的每一次制度化，不是由某个人决定的，是由某个成功决定的。

布尔巴基不必同意，他们的成功已经同意了。一套被公认为"现代数学的正确形态"的东西摆在那里，改革者要为自己的方案找一个权威的形态，他们不会去找一本十九世纪的算术教材。那个"所以"（这是正确的形态，所以这是应当被交出去的形态）不需要任何人签字。

这一条与第二章欧几里得那一节完全同构，而且两次的形状一模一样：欧几里得可能知道读他的书不等于学会几何，布尔巴基明确知道自己那套不是发现的过程——两人都没有决定过后来发生的事，而后来的事仍然是他们的成功造成的。

一个人可以不为自己的影响负责，但那个影响仍然存在。本书对他们两位的判断，从头到尾都是这一句。

七、编一的横向账：六次操作的共同语法

把六章的账合起来算。

章	人	那一次可指认的操作	户头搬到了哪里
一	柏拉图	给光滑化的产物颁发"先在"的出生证明	理念世界
二	欧几里得	把这张证明做成一台不需要信徒的机器	（不设户头，改设格式）
三	笛卡尔	来路被磨掉后，为"我怎么会知道"开出第一张收据	灵魂
四	康德	把先在从对象搬到主体的形式，从而免于被追	主体形式

		问来路	
五	弗雷格	不找户头，改划边界， 把发生问题逐出数学	第三领域（并划出边界）
六	哥德尔／布尔巴基	信念上直接报告"看见"；工艺上把倒置推到极限	数学直觉／公理系统

六次操作，五个不同的户头，一台机器。而它们有一个共同的语法特征，这是本编的承重发现：

六次都只问"这个对象从哪来"，六次都没问"它怎么被接住"。

而共同语法还不是共同动作。语法说的是他们没问什么，动作说的是他们做了什么。那个共同动作有一个可以命名的形状，本书在第十三章正式给出它的名字——回溯性本体化：一件在特定条件下被稳定化出来的成果，被回溯性地提升为"世界本来如此"的证据。上面那张户头表的六行，是同一个动作在六个不同高度上的六次执行；而高度一次比一次低、一次比一次难攻，动作一次未变。

这不是六个人的疏忽。这是问句本身的形状决定的——当你手上拿着的是一件已经磨光的产物，你能提出的问句只有关于它出身的那一类。你不会去问一颗鹅卵石"你是怎么被接住的"，你只会问"你原来是什么形状"。

而这，恰恰使得那道工序在整个发现派传统里完整地不可见。它不是被否认了，是从从来没有进入视野。

八、编末：这一编怎么派生母题

回到母题的三个部件。

部件一（发现是发生的一个时相，不是对立面）：本编六次立法，每一次的对象都是一件已经成熟的产物——柏拉图的完美三角形、欧几里得的公理体系、笛卡尔的几何观念、康德的欧氏空间、弗雷格的数、哥德尔的集合。没有一次是关于一个正在成形的东西的。这直接证成了导论第三节那个入口：这个问句只在链跑完的地方提得出来。

部件二（争论争的是一份归属错觉）：六个户头彼此不相容，却各自都能自洽地解释全部现象。一个能被六种互不相容的方案同等地解释的现象，通常不是因为证据不足，而是因为现象本身不含裁决这些方案所需的信息——而它之所以不含，是因为含着那个信息的东西（土壤与路径）在它成为现象之前就被磨掉了。

部件三（代价在下次）：本编末尾的新数学是第一次露头。回溯性本体化完成之后，"这个东西是怎么来的"在体系里就没有位置了——它不是被否认，是没有位置；而一个没有位置的问题不会消失，它会被外包。第十三章将指出它被外包到了三处：生成问题被外包给运气，创新机制被交给天赋，结构更新被交给偶然。三处都不可训练，于是这个体系在原理上不可能长出一套关于"如何生成"的公共工艺。发现派在哲学上从未被驳倒，也不可能被驳倒——但它在教室里输了一次，而且输的方式恰好是母题第三部件的预测：把产物磨得越干净、摆得越靠前，接收者越接不住。

本编级可推翻条件：若能在发现派传统中指出一位思想家，他在讨论"数学对象是否先在"时，正面处理了"一个还没有这个对象的人如何获得它"这一问句，并把后者作为前者的证据来使用，则本编"六次共同语法"的判断被推翻。本书作者已尽力寻找而未找到最强的反例是维柯，而他属于编二，不属于发现派。

编二 发生的六次反攻

编一是发现派的六次立法。本编是另一侧。

同样要先声明态度，而且这一次的声明与编一相反：本编不认为这六个人赢了。六次反攻，每一次都在局部赢得极其漂亮——亚里士多德拆掉了那个多余的世界，维柯说出了整场争论里最接近本书的一句话，布劳威尔在数学内部真刀真枪地打了一仗并且付了代价，皮亚杰把“发生”第一次变成可观察的东西，拉卡托斯用一个完整的历史个案证明了定义是产物不是起点，拉图尔与伍尔加在自然科学一侧给出了这道工序最完整的机制描述。

六次都赢了局部。六次都输了整体。而输的原因六次相同。

本编的任务，是把每一次胜利的确切位置指认清楚，然后指出那个相同的失败——它不是六个人各自的疏忽，它是问句的形状造成的。

第七章 亚里士多德：把理型拉回个体，而抽象说不出必然性

判断卡片：亚里士多德拆掉了那个多余的世界，这是发生派最早也最彻底的一次胜利；但他随即发现，从个别事物抽象出来的东西只能给出普遍性，给不出必然性，于是他不得不在抽象的尽头另立一种能直接把握第一原理的能力——先在被从世界赶了出去，又从认识者这一侧走了回来。

一、他做的那件事有多干净

柏拉图立了两个世界。亚里士多德只用一个。

他的动作极其干净：形式不在别处，就在事物之中。这个铜球的球形，不是对某个住在理念界的“球本身”的摹仿，它就是这个铜的形式；把铜与球形分开，只能在思想里做，不能在事情上做。至于数学对象——三角形、数、比例——它们是我们从可感事物中抽出来的：把一块铜的颜色、重量、材质统统不管，只留下它的形状与量，就得到了几何学的对象。这个动作叫抽象（ἀφαίρεσις）。

这一手一次解决了柏拉图那三刀里的两刀。分有困难没有了——形式就在事物里，不需要一条神秘的纽带把两个世界接起来。第三人无穷倒退也没有了——不再有一个高踞别处、供个别物摹仿的独立实体，也就不需要更高的实体来解释这个摹仿。

这是发生派历史上最早、也在某种意义上最彻底的一次胜利。那个多余的世界被拆了，而且拆得如此干净，以至于此后两千年，凡是不满意柏拉图的人几乎都是从这里出发的。

二、胜利之后立刻出现的账

但拆掉一个世界，就要接管它原来承担的工作。柏拉图那个理念世界不是白立的，它扛着一件东西：必然性。

请看抽象这个动作能给出什么。我看过一千个三角形，把它们的颜色材质统统不管，得到三角形的形状与量——我得到的是这一千个三角形共同有的东西。这是一个普遍的东西：它对这一千个都成立。但它是必然的吗？“三角形内角和为两直角”这句话，为什么不只是“到目前为止看过的都是”？

亚里士多德极其清楚这个困难，而且他不回避。《后分析篇》整部书处理的就是它：科学知识（ἐπιστήμη）必须是关于必然的、通过原因来把握的；而证明必须从前提出发，前提又要从更前的前提出发，不能无穷倒退，所以必须有不经证明而被知道的第一原理。

那么第一原理从哪来？他的回答是一条两段的路。先是归纳（ἐπαγωγή）：从个别感觉出发，经记忆、经验，逐步上升到普遍。然后——这是关键的一步——是努斯（νοῦς）：一种不经推论而直接把握第一原理的能力，比科学知识本身更为可靠。

三、账被记到了哪里

请把这一步与编一第三章并排放。

笛卡尔说：这些观念不可能从感官来，也不可能是我编的，所以它们原本就在我心里。亚里士多德说：第一原理不可能被证明（否则无穷倒退），归纳只能把我领到门口，所以必须有一种能力直接把握它。

两句话的结构完全一样，只是户头名不同。笛卡尔记在天赋观念名下，亚里士多德记在努斯名下。而两个户头都在同一个位置上：认识者一侧那个不再被追问的能力。

于是编二的第一条判断可以立下了，它将在本编逐章重现：

亚里士多德把先在从世界赶了出去，它从认识者这一侧走了回来。

这不是他不小心。这是那笔账的必然去处：必然性这件事必须有个来源，而抽象给不出必然性。你从一千个个例里抽出来的东西，无论抽得多干净，它的效力也不会超过那一千个个例——除非你能说出那一千个为什么必须如此，而“为什么必须如此”正是抽象拿不出的东西。

四、他其实离答案很近，且他自己走过那条路

这里要给亚里士多德一个编一那六位都没有得到的评价：他离本书的答案比任何一位古人都近，而且他自己有一段文字几乎说出了它。

那段文字在《形而上学》第九卷。他在讨论几何图形的性质是如何被知道的，说了一件很不像抽象论的话：那些图形的性质是通过实现出来才被发现的——把图形分割开，性质就显出来了；如果事先已经分割好，它们就会一目了然；而它们之所以不一目了然，是因为要靠一个动作把它们做出来。

请注意这句话说了什么。它说的不是“我从许多三角形里抽出共同点”，它说的是“我做了一件事（作辅助线、分割），于是那个性质出现了”。这不是抽象，这是构造。而构造是携带必然性的：当你把三角形的三个角撕下来拼成一条直线，你撞见的不是“这一千个都是”，你撞见的是为什么必然是——两条平行线间的内错角。

必然性不在印象里，也不在灵魂里，在那条被走通的路径里。这正是编一第三章末尾立下、编五第二十六章要正式改判的那条。

那么亚里士多德为什么没有沿这条路走下去？本书的判断是：因为他要回答的是那个问句。他要回答“几何对象是什么、它在哪里”，而不是“一个还没有它的人如何得到它”。构造那一段在他那里只是一个说明，不是地基——它出现在一个讨论潜能与实现的段落里，而不是出现在他的知识论纲领里。

一句被写在错误位置上的正确的话，两千年里没有人接手。这一条本书会在编二反复见到，第十一章拉卡托斯是唯一一次例外。

五、原始文本细读：《后分析篇》最后一章那条不肯说完的路

《后分析篇》全书讲证明，讲到最后一章，他必须处理那个绕不过去的问题：证明要从前提来，前提要从更前的前提来，那么最前面那一批从哪来？

他给的那条路值得逐段看，因为它在中途换了性质。

第一段是知觉。动物都有感觉，但只有一部分动物的感觉能在心灵中留下印象，也就是记忆。

第二段是经验。同一件事的许多次记忆合起来，成为一次经验。

第三段是普遍者的站立。他用了一个极生动的比喻：溃败的军队中有一个人站住了，然后又一个站住，再一个，直到重新排成阵列。普遍者就是这样在灵魂里站起来的一一从一个个个别里，第一个普遍者站住，然后是更高一层的。

第四段——路在这里换了性质。他说，把握第一原理的不是科学知识，而是努斯；而努斯比科学知识更为准确、更为真实。

前三段是一条发生的路，第四段是一次任命。

前三段每一步都可以被追问：“同一件事的许多次记忆怎么合成一次经验？”“第一个站住的那个人凭什么站住？”这些问题在那三段里是有意义的、可以继续追的。而到第四段，追问停止了：努斯不是被解释的，它是被给予的，而且被给予了一个比它要解释的东西更高的地位。

请注意那个军队的比喻本身有多好。溃败中一个人站住——这不是从一堆印象里"抽出"共同点，这是在混乱里第一次出现一个稳定的位置，然后其余的围绕它排列。这个图景与本书说的"显露从差异里被磨出来"几乎逐字对应，而且比本书说得更漂亮。

他把那条路走到了最后一步，然后在最后一步上换了口径。而换口径的位置，恰好是必然性该出现的位置。

六、一处对本书不利的读法

亚里士多德的辩护者会说：本章误读了努斯的性质。努斯不是一个额外的、神秘的能力，它就是那个归纳过程达到终点时的状态本身——不是在归纳之外另加一件东西，而是归纳完成时对普遍者的直接把握。把它读成"另立一个先在的户头"，是用近代的框架去套一个前近代的文本。

这个辩护有力，而且它在文本上有依据——那个军队比喻确实把努斯说成了同一个过程的收束，不是外来的插入。本书接受这个读法比正文更精确。

但它不改变那笔账的去处，理由可以说得很干脆：

一个"归纳完成时的状态"，被赋予了比归纳本身更高的确定性——而这一步没有理由。

若努斯只是归纳的收束，它的可靠性至多等于那条归纳；说它更准确、更真实，就是给它加了归纳给不了的东西。加的那一点，正是本书要追的那笔账。

这个更精确的读法反而使亚里士多德的处境更像编二后面几位：他没有从外面搬来一个先在，他是把自己那条路的终点提了一级。而编二编末那条判断说的正是这个形状——不是他从别处引进了一个先在，是那个位置上必须有一个东西不再被追问，于是路的终点自己升格了。

七、这一章在全书里的位置

亚里士多德给了发生派一次干净的开局：不需要另一个世界。但他也第一次演示了这场争论的收费站——拆掉对面的先在，你就得在自己这边立一个。

下一位要做的，是一件更大胆的事：他不去找必然性的来源，他直接说，只有我们自己造出来的东西，我们才真的知道。这是整场争论里最接近本书的一句话。而他紧接着走反了一步，而且走反的方向，正是本书在第十三章第七节立挡板挡住的那一步。

第八章 维柯：真理即所造——最接近的一句话，与它走反的那一步

判断卡片：维柯说出了整场争论里最接近本书的一句话——我们只能真正认识我们自己造出来的东西；但他随即用这句话得出了一个相反方向的结论：既然数学是我们造的，它就只关于我们自己的构造而不关于世界。他用 **necessity** 换来了 **certainty**，代价是把数学逐出了关于世界的知识。这一步正是本书在第十三章第七节挡住的那一步，而它的第一次发生在三百年前。

一、那句话

一七一〇年，维柯在一部讨论古意大利人智慧的小书里写下了一条原则，它后来成为他全部工作的地基：

真理即所造（*verum esse ipsum factum*）——真的东西与被造出来的东西是同一个。

这句话的锋利在于它把认识的条件与制造的条件绑在了一起：你之所以能真正知道一样东西，是因为你知道它是怎样被做出来的；而你之所以知道它怎样被做出来，是因为做它的人是你。

请把这句话与本书的母题并排放。本书说：一件东西被磨平之后，它的来路消失，于是它显得本来就在，而接收者失去了唯一能够改写自己的凭借。维柯说：知道一件东西，就是知道它的来路。

这是整场两千五百年争论里，最接近本书的一句话，而且它出现在一七一〇年。

二、他为什么会想到这一句

维柯不是数学家，也不是认识论专家。他是那不勒斯的一位修辞学教授，一辈子薪水微薄，晚年几乎被同时代人遗忘。他想到这一句，是因为他在跟一个当时正如日中天的对手较劲——笛卡尔。

笛卡尔那一套的核心是：清楚明白的观念是真理的标准，数学是典范，而历史、法律、语言这些东西模糊、多变、不可靠，不配称为知识。维柯要为自己那一行辩护，于是他问了一个反手的问题：凭什么？

他的回答就是那条原则。自然界不是我们造的，是上帝造的，所以只有上帝完全知道自然；而民族的世界——法律、语言、制度、习俗、神话——是人造的，所以人可以真正认识它。《新科学》整部书就是这条原则的展开：他要从那些看起来最不可靠的材料里，把人类制度的发生史重建出来。

这是一次极其漂亮的翻盘。他把笛卡尔的等级表倒了过来：最可靠的不是最抽象的，是最人造的。

三、然后他走反了一步

问题出在数学落在哪一格。

按那条原则，数学显然属于“人造”那一格——点、线、数，这些东西的元素是我们自己规定的，所以我们可以完全地论证它们。维柯自己就是这么说的：数学之所以能被我们完全证明，恰恰因为我们造了它的对象。

到这里都对。问题在于他从这里推出了什么。

他推出的是：正因为数学的对象是我们造的、是我们规定出来的，所以数学的确定性是买来的，而买它的代价是它不涉及世界。数学之所以那么确定，是因为它讲的是我们自

己的虚构；它像一个我们自己发明并且规定了全部规则的游戏，游戏里的每一步都无可争辩，但那种无可争辩恰恰说明它不是关于外面那个世界的。

这一步，就是本书在第十三章第七节立挡板挡住的那一步。

那一节写的是：从"稳定特征是成果不是起点"滑到"真理是被造出来的"，只有一步，而这一步一旦迈出，全部判断都会被正确地归入相对主义而作废。维柯是这一步在历史上最早的一次完整演示，而且演示得极为清晰。

四、这一步为什么不成立

不成立的地方在于一个未经检验的暗中假设：凡是被造出来的，就只关于造它的人。

这个假设在很多场合成立。一场棋赛的规则是人定的，棋赛里的定理只关于这场棋赛。但它不普遍成立，而数学正是最著名的反例——一件被造出来的东西，可以后来被发现严格地约束着一个不是人造的世界。

最锋利的例证是复数。虚数被造出来，是为了收拾三次方程求根公式里那个绕不过去的中间步骤：即使三个根都是实数，公式也要求你在中途穿过一个"不可能的"平方根。造它的时候，没有人认为它关于任何真实的东西——它的名字 *imaginary* 至今还带着当年那份怀疑。三百年后，量子力学的基本方程里那个 i 不是修辞，它不能被消掉。

同样的话可以对非欧几何说一遍：造它的时候，罗巴切夫斯基自己把它称作"想象的几何"；一个世纪后，广义相对论用上了它的一支来描述真实的时空。

这些例证并不证明那些对象一直就在那里等人发现。它们证明的是一件更窄、也更麻烦的事："被造出来的"与"只关于造它的人"，是两件事。维柯把它们当成了一件。

而这正是编一第五章那条分界的另一面。弗雷格守住了"命题的真不依赖任何人的心理过程"；维柯用他自己的原则把这一条推翻了，而他其实不必推翻它——他只需要说"我们能知道它，是因为我们造了它"，不需要再加一句"所以它只关于我们"。多说的每一句，让他从此不能参加这场争论。

五、他被埋没的真正原因

维柯的《新科学》在他生前几乎无人问津，此后一百多年才被重新发现。通常的解释是他文体晦涩、身处边缘、生不逢时。本书要提一个结构性的解释，它与本编的主题直接相关：

他把自己那条最有力的原则，用在了一个使它无法被检验的地方。

"真理即所造"如果用在数学上，它会立刻遇到硬材料：数学史里有大量可查的、有日期的、有争论记录的构造过程，任何人都可以拿去核对。而他把它用在了人类制度的远古发生上——那里没有材料，或者说材料全靠推测。于是这条原则最强的一次应用，落在了它最不可能被证实也最不可能被证伪的地方。

由此得到一条本书自己也要守的纪律：

一条原则的力量，取决于你把它用在哪儿能被人抓住把柄。

编六第三十三章那三个预注册实验，正是本书对自己执行这一条的方式。

六、原始文本细读：那条原则第一次出现时的措辞

"真理即所造"这句话，在维柯那里第一次出现时的措辞比后来的转述更有意思，值得逐层看。

他的论证是这样走的：上帝完全认识自然，因为自然是他造的；人只能完全认识那些人自己造出来的东西。由此，那些以人的构造为对象的学问（数学、以及后来的《新科

学》所处理的民族世界）是人可以真正知道的；而自然科学，人只能从外面观察，不能从内部知道。

请注意这个论证的前提是神学的。"造者知其所造"这条原则，它的原型是造物主与造物的关系；维柯做的是把这条关系移用到人身上。

这个来历有两个后果，一个对他有利，一个对他致命。

有利的那个：这条原则一开始就带着"完全知道"的强度。他不是在说"我们对自己造的东西比较熟悉"，他是在说一种范畴上的差别——造者与旁观者不在同一个认识位置上。这个强度是本书完整继承的，而且本书第五编第五章那句"证明可以封存，看懂不能代办"，说的是同一件事的另一半。

致命的那个：神学原型里，造物主与造物之间是外部关系——上帝造了自然，而上帝不在自然里。移用到人身上时，这层外部性被一并带了过来：如果这是我造的，那么它就在我这一边，不在世界那一边。

那一步滑坡，就是从这里来的。它不是维柯的一次推理失误，是他借来的那个原型自带的一个零件。而只要把那个零件卸掉——承认一个被造出来的东西可以立在造它的人和世界之间、并且反过来约束造它的人——整条原则就完全可用，而且正是本书在用的那一条。

七、一处对本书不利的读法

维柯的研究者会指出一件事：本章拿数学去衡量他，是拿错了尺子。

维柯真正的工作在《新科学》，那本书处理的是语言、神话、法律、制度的发生；数学在他那里只占很少的篇幅，而且主要是作为与笛卡尔论战的一个例子出现的。用他顺带提到的一个例子，去判定他整套思想"走反了一步"，不成比例。

本书接受这个不成比例的指控。并把判断的适用范围收窄：

本章说的不是维柯的整套思想走反了，而是"真理即所造"这条原则在应用到数学上时，被他配上了一个使它自伤的附加条款。

而这个收窄之后，本章第五节那条判断反而更站得住：他把最强的原则用在了最不可能被抓住把柄的地方（远古制度的发生），而在唯一有硬材料可核对的地方（数学）只顺带提了一句，还提反了。

一条原则的力量，取决于你把它用在哪里能被人抓住把柄。这一条本书写在了正文里，而它对本书自己是同样有效的一把刀——编六第三十三章那三个实验，正是本书交出把柄的方式。

八、这一章在全书里的位置

维柯给了发生派最好的一句口号，也给了它第一次自伤。此后每一次发生派的进攻，都要在同一个地方交这笔学费：如果这东西是我们造的，那它凭什么必然？

下一位不交这笔学费。他的办法是：不要那种必然性了。他在数学内部真刀真枪地打了一仗，并且付出了一位数学家所能付出的最重的代价。

第九章 布劳威尔：数学内部最硬的一次进攻，和它付出的真实代价

判断卡片：布劳威尔是唯一一个在数学内部、用数学家的方式、并且真金白银地付出了代价来打这一仗的人——他宣布数学对象只在被构造出来时才存在，并据此拒绝了大批经典定理。但他把构造的源头安放在一个孤独主体对时间的原始直观上，又宣布数学在本质上是无语言的；于是他在赶走了对象一侧的先有之后，在主体一侧立起了一个更不可追问的先有，并且亲手切断了它被传递的可能。

一、他不是在做哲学

前两章那两位是哲学家。布劳威尔不是——他是二十世纪最好的拓扑学家之一，不动点定理、维数不变性、区域不变性都是他做出来的。这一点在本章至关重要，因为它决定了这次进攻的性质：

这不是一次从外面对数学的批评，这是一次从里面动手的改造，而且改造者要为改造承担损失。

他的主张可以压成一句：一个数学对象存在，当且仅当它能被构造出来。不是“我们能证明它不可能不存在”，是“我们能把它做出来”。数学不是对一个先在王国的探索，而是心灵的一种构造活动。

由此立刻推出一件让当时的数学界无法接受的事：排中律在无穷场合失效。

这一步要说清楚，因为它常被误传为“布劳威尔认为逻辑错了”。他的意思很具体。“要么 P ，要么非 P ”这句话，在你能逐个检查完的有限场合当然成立。但当 P 说的是关于无穷多个对象的某件事时，“要么 P 要么非 P ”这句话背后其实藏了一个承诺：存在一个办法，能判定到底是哪一个。而在无穷的场合，这个承诺没有兑现的保证。于是那些形如“假设不存在，导出矛盾，所以存在”的证明，在他看来什么也没有造出来——它们证明了“不可能没有”，而不是“这里有一个”。

请注意，这与本书母题的第一部件是同一个动作，只是发生在数学内部：他要求把结论还原为构造它的那条路径，并拒绝承认一条没有路径的结论。

二、代价是真的

一位哲学家提出这样的主张，代价是零。布劳威尔的代价不是零。

他必须放弃一大批经典定理，或者把它们改写成弱得多的形式。选择公理的很多用法没有了；实数的三分律（任一实数大于零、等于零或小于零）在直觉主义里不成立；大量存在性定理只剩下否定形式。而最刺眼的一件事是：

他自己那个最著名的定理——布劳威尔不动点定理——用的正是他后来所拒绝的那类论证，在直觉主义的意义上它不成立。

这不是一个可以一笔带过的细节。一位数学家亲手推翻了自己成名作的证明方式，并且此后不再用那种方式做事，这在数学史上极为罕见。本书对布劳威尔的全部敬意在此：他不是批评别人的房子，他先拆了自己那间。

后来发生的事同样值得记一笔。他与希尔伯特之间那场被称为“基础之争”的冲突，最终以一种很不体面的方式收场：希尔伯特把他从《数学年刊》的编委会里除名了。一次真正的范式冲突，在这场争论里第一次以人事的方式结束。

三、他把先在搬到了哪里

那么这次进攻为什么在本书看来仍然输了整体？

因为一个必须回答的问题：如果数学对象是被构造的，那么构造依据什么？构造不能凭空，它总得有一个起点、一个最原初的动作。

布劳威尔的回答是：时间的原始直观。心灵经历一个瞬间落入过去、另一个瞬间到来，由此产生“二一性”——两个东西被把握为一个整体又保持为两个。这是一切数学构造的源头：从二一性生出自然数序列，再生出一切。

请把这一步与第七章并排。亚里士多德把先在从世界赶走，它从努斯那里走了回来。布劳威尔把先在从数学对象那里赶走，它从时间的原始直观那里走了回来。而这个新户头比努斯更难攻——它不是一种能力，它是一切经验的形式，任何要检验它的动作本身都已经在它里面了。

于是编二的那条判断第二次出现，而且更清楚：

每一次反攻在它取胜的那一处，都必须为自己另立一个先在。

这不是偶然。如果你否认对象是先给的，你就必须说出是什么在构造它；而无论你说出什么，那个东西都会被提升为不再被追问的起点。问句要求一个来源；把来源从对象一侧搬到构造者一侧，来源仍然是来源。

四、更致命的一条：他亲手切断了传递

如果只有上一节那一条，布劳威尔的处境与亚里士多德相同。但他还做了一件别人没做的事，而这件事对本书尤其重要。

他坚持：数学在本质上是无语言的活动。数学是心灵内部的构造；语言只是对它的一种不完全的、事后的、必然失真的记录；数学的确定性在构造本身之中，不在任何符号系统里。他甚至认为，把数学等同于形式系统正是一切混乱的根源。

这一条在他的框架内完全一致，而且它有一个真的洞见在里面——本书第五编第五章那句“证明可以封存，看懂不能代办”，说的正是这件事的一半。

但它的后果是灾难性的，而且后果的形状恰好是本书的主题。

如果数学是无语言的心灵构造，那么它如何从一个人到达另一个人？布劳威尔没有回答，而且按他的立场，这个问题在原则上不可能有好的回答——任何传递都要经过语言，而语言必然失真。他的追随者极少，他的著作以晦涩著称，他的直觉主义在他身后主要是靠海廷把它形式化成一个演算系统才活了下来。

而海廷做的事，恰恰是布劳威尔不同意的那件事：把它写成语言、写成可以传下去的形式。

这里要记下本编最锋利的一处对照：

布劳威尔正确地看到，一个数学对象必须在每个人那里被重新构造一遍；他随即宣布这件事不能被语言承载。于是他给出了一个正确的诊断，同时取消了任何处方的可能。

本书编六那道工序，正是要在他放弃的那个位置上继续。而本书与他的分界很清楚：不可递送的是构造，可递送的是引发构造的条件——困境、路径的落脚点、以及那个逼人非走不可的缺口。第五编第八章会论证，教师的全部技艺都落在这一处。布劳威尔说的“递送不了”是对的，他没想到的是，递送不了的东西可以被引发。

五、一处对本书不利、必须写明的地方

诚实起见记一条。

直觉主义在数学界基本上被搁置了，原因不是哲学上被驳倒，而是它太贵。放弃了那些定理之后，剩下的数学做起来极其吃力，而经典数学在同样的时间里造出了大量有用的东西。绝大多数数学家的选择不是“布劳威尔错了”，是“这个代价我付不起”。

这对本书是不利的证据，因为本书全书主张“还原路径”，而直觉主义正是把这个主张在数学内部推到极限的一次尝试，结果是它在实践上败给了不还原路径的那一方。

本书的应答有两条，而且要写在明处。

第一条：直觉主义与本书主张的不是同一件事。他要求的是数学本身只承认构造性的结论——这是对知识内容的限制。本书要求的是在把一个已有的结论交给一个新人时，把它的困境与路径一并交出——这是对呈现次序的要求，不改动任何一条定理的成立与否。一个用最经典、最非构造的方式证明的定理，照样可以被去光滑化地教。两件事在代价上完全不同：他的代价是失去定理，本书的代价只是多花课时。

第二条：他的失败反而是本书的一个证据。当“必须自己构造出来”被提升为对知识内容的要求时，它太贵而不可行；当它被限制为对呈现次序的要求时，它便宜而可行。这个对比说明，问题从来不在“构造”这个概念上，而在它被安放在哪一层。布劳威尔把它安放在了本体层，本书把它安放在传递层。

六、原始文本细读：他自己那个定理的两种命运

要看清布劳威尔的代价有多真，最好的材料不是他的哲学论文，是他自己那个定理的两种命运。

不动点定理：把一个闭圆盘连续地映到自身，必定有一个点被映到它自己那里。这个结论今天在博弈论、经济学均衡、微分方程里被大量使用。

经典的证明是这样的：假设没有不动点，那么每一点都可以沿着“它到它的像”这条方向连出一条射线，射线交边界于一点，于是得到一个把圆盘连续映到边界的映射；而这样的映射不存在（否则圆盘可以被连续地收缩到边界，与拓扑性质矛盾）。所以不动点存在。

请看这个证明的形状：它假设不存在，导出矛盾，于是宣布存在。它自始至终没有告诉你那个点在哪里，也没有给出任何逼近它的办法。

而这正是布劳威尔后来所拒绝的那一类论证。按他的标准，这个证明证明了“不可能没有”，而不是“这里有一个”——它没有造出任何东西。

于是那个定理在直觉主义里不成立。更准确地说：那个一般形式不成立；后来的构造性数学能证出的是弱得多的东西——比如对任意精度，你能找到一个“几乎不动”的点，而这与“存在一个真正的不动点”不是同一句话。

一位数学家，把自己最著名的成果的证明方式判为不合法，此后不再用它。

这一节要记的不是这件事有多悲壮，而是它在本书的论证里承担什么：它证明了布劳威尔那套主张的代价是真金白银的，因而他不是提一个便宜的哲学立场。编二从头到尾在说“六次反攻各自赢在局部”，而只有这一次，赢的人当场付了账。

七、一处对本书不利的读法

有一条反读，而且它对本书比对布劳威尔更不利。

反读是这样的：本书说自己“只管呈现次序，不管知识内容，所以代价只是多花课时”——这个便宜是不是占得太轻巧了？

具体地问：一个概念若被要求“必须在每个学习者那里带着困境与路径重新发生一次”，那么那些在原理上没有直观路径可走的东西怎么办？高维空间、超限基数、不可测

集、选择公理——这些东西没有一条可以让十岁孩子亲自走通的粗糙路径，而它们是真正的数学。本书的工序在这些地方是不是根本无处落脚？

本书承认这个反读击中了一个真实的边界，并给三条回应。

其一，本书的适用范围本来就写明了（编六第三十四章第二节）：小学与中学的数学学习者。上面那些对象不在范围内，本书对它们不作主张。

其二，即使在那些对象上，困境仍然可以还，只是路径不能。选择公理没有直观路径，但“我们需要从无穷多个非空集合里各取一个，而没有规则告诉我们取哪个”这个困境，是可以完整摆出来的。编六第三十章那条区分在这里派上用场：困境常可原样还，路径几乎总要重铺——而在这一类对象上，路径可能重铺不了。那时能做的只有前半，本书不假装能做全。

其三，也是最要紧的一条：这个边界恰好与布劳威尔那一次失败同源。他要求一切数学对象都必须可构造，代价是失去大批定理；本书若要求一切数学对象都必须可被学习者走通，代价是失去大批内容。两者是同一个错误在两个层上的形态，而本书之所以能避开它，正是因为它把要求限定在呈现次序上、并且承认有些内容只能被讲授。

一本主张“要还原路径”的书，必须承认有些路径还不了。承认这一点，本书才不会重蹈第五节那次失败。

八、这一章在全书里的位置

布劳威尔是这场争论里唯一一个自己出钱的人。他证明了发生论在数学内部可以被认真对待，也证明了把它当作本体主张的代价有多重。

下一位不碰本体。他做的是一件谁也没做过的事：他把“发生”这件事变成了可以被观察、被记录、被复核的东西——他去看孩子。

第十章 皮亚杰：把发生变成可观察的，以及他没有走的那一步

判断卡片：皮亚杰做了此前两千三百年里没有人做过的事——他把“发生”从一个哲学立场变成了一件可以被观察、被记录、被别人复核的事实，并且给了本书最核心的那对概念（同化与顺应）。但他把发生安放在认识主体的成熟上，而不是安放在对象的交接上；于是他解释了一个孩子如何长出结构，却没有处理一件已经成熟的东西被交到他手里时发生了什么，而后者正是课堂上每天在发生的事。

一、他做的那件事，此前没有人做过

前九章里的所有人——柏拉图、亚里士多德、笛卡尔、康德、弗雷格、维柯、布劳威尔——争论的方式是同一种：提出一个立场，给出论证，等着别人反驳论证。

皮亚杰换了一种方式：他去看孩子，而且记录。

他和他的合作者在日内瓦做了几十年这件事。给一个五岁的孩子看两排同样多的扣子，排得一样长，他说一样多；把其中一排拉开一点，他说拉开的那排更多。给他两个一样的杯子装同样多的水，他说一样多；把一杯倒进又高又细的杯子，他说高的那杯更多。这些不是思想实验，是可以在任何一间幼儿园重做一遍的观察，而且它们稳定地重复出现。

这一步的意义怎么估计都不过分。在此之前，“知识是逐步长出来的”是一个立场，你可以信也可以不信，双方各有各的直觉。在此之后，它是一批任何人都可以去复核的事实：数、量、长度、体积这些看起来最自明、最“本来就在那里”的东西，在一个具体的孩子身上有一个可以观察到的建立日期。

“守恒”不是一个先天形式，它是一件在四到七岁之间发生的事。这一句是对编一第四章那位最结实的一击，而且它不是论证，是记录。

二、他给了本书最核心的一对概念

皮亚杰给本书的第二件东西，是一对概念，而且本书的整个第四编都建立在它上面。

同化 (assimilation)：新材料被纳入已有的结构，用已有的办法去处理它。

顺应 (accommodation)：已有的结构为了容纳新材料而自己发生改变。

一个孩子第一次见到一只小狗，用他已有的“会动的毛茸茸的东西”这个结构去接住它，是同化；当他撞见一只猫也符合这个结构却不是狗、于是不得不把结构劈成两支，是顺应。

本书全书所说的“改写”，在皮亚杰那里就是顺应。这一点必须写在明处，而且必须写得比通常的致谢更重：本书不是从别处独立发明了这个概念，本书用的是他的概念，只是换了一个场合。

而他还给了本书一条更精确的东西：反身抽象 (abstraction réfléchissante)。他明确区分了两种抽象——从对象身上抽（这块石头是红的、圆的、重的），和从自己对对象所做的动作上抽。他认为数学概念来自后者：数不是从一堆石头上抽出来的性质，而是从“我把它们一个一个数过去”这个动作上抽出来的；一个孩子发现“不管从哪一头数，数出来都一样多”，他抽的不是石头的性质，是他自己那个动作的性质。

这一条几乎就是编一第七章那段被写在错误位置上的亚里士多德，两千三百年后被正式安放到了地基上。

三、他没有走的那一步

那么，一位提供了本书最核心概念的人，为什么在本编里被判为“输了整体”？

因为一个位置问题。皮亚杰的发生，是主体一侧的发生。

他关心的是：一个孩子的认知结构如何从感知运动阶段，经前运算、具体运算，长到形式运算。发生的主语是孩子，发生的宾语是他的结构。整个过程被描述为一个有机体在与环境相互作用中逐步平衡化的过程。

而本书关心的是另一件事：一件已经成熟、已经被磨光、已经被写进课本的东西，被交到一个孩子手里时，发生了什么。

这两件事不是同一件事，而且差别很实：

- 在皮亚杰那里，环境是中性的——世界提供材料，孩子来同化和顺应。他没有问：这些材料是被谁、以什么形状递过来的？一个概念以“分饼的困境”的形状递过来，和以“分数是把单位 1 平均分成若干份”的形状递过来，对同化与顺应的后果是否相同？他的框架里没有这个变量。
- 在皮亚杰那里，顺应之所以不发生，是因为孩子的结构还不到那个阶段。这是一个关于成熟度的解释。而本书要提出的是另一种可能：顺应之所以不发生，是因为材料被递过来的形状不触发它——太合了，一点不合都没有，于是顺应根本没有被召唤。在皮亚杰那里是“不合而改不动”，在本书这里是“太合而无需改”。

第二条差别是本书第四编的入口，而且它对皮亚杰的框架是一个真正的补充而不是反驳：他解释了顺应为什么困难，没有解释顺应为什么可以不被调用。

四、他自己的阶段变成了新的先在

编二那条判断在这一章也要兑现，而且这一次它的形态很值得注意。

皮亚杰的阶段序列——感知运动、前运算、具体运算、形式运算——被他描述为普遍的、次序固定的、由内在逻辑决定的。而这一套阶段在后来的教育实践中，恰恰变成了一个新的“先在”：某个东西“这个年龄段的孩子还不能理解”，成了一句不需要再追问的判词。

请注意这个转化的形状：一套关于发生的理论，本身被回溯性本体化了。第十三章给出的那个名字在这里第一次落到发生派自己头上——阶段本是一批观察被归纳出来的成果，被提升为儿童的天然属性。

后来的研究给了大量修正：把守恒任务的问法改一改、把材料换成孩子熟悉的东西、把提问的社会情境改一改，通过的年龄会明显提前；不同任务之间并不像阶段说预期的那样同步。这些修正不推翻他的核心观察，但它们说明阶段的边界比他描述的软得多，而且有一部分是任务本身造成的。

于是本书对他的判断可以写得很紧：

他证明了知识在个体身上有发生史，这一条立住了；他把发生史归给了成熟，这一条被他自己的方法所修正。而“归给成熟”这一步，恰好把材料的形状排除在解释之外——那正是本书要研究的那个变量。

五、一处必须为他辩护的地方

有一种流行的批评说，皮亚杰的框架把学习看成个体的、孤独的，忽略了社会与语言，而维果茨基补上了这一课。这个说法大体不错，但用在本书的语境里会走样，须澄清一句。

本书并不站在“社会一侧”去批评皮亚杰。维果茨基那条线（最近发展区、支架、社会文化中介）是本书的同盟，但它补的是谁在旁边帮忙这个变量，本书问的是那件东西以什么形状被递过来。两个变量都真实，而且它们不能互相替代：一位极有耐心、支架搭得极

好的教师，完全可以把一件被磨得极光滑的成品，极其有效地递给孩子——支架搭得越好，递送越成功，而这恰恰是第四编要说的最坏情况。

这一句在本书是要紧的，因为它挡住一个几乎必然发生的误读：本书不是在要求教师更耐心、更热情、更善于互动。这些都好，但它们不在本书的变量上。

六、原始文本细读：守恒实验里那个被忽略的细节

皮亚杰那批实验被复述过无数次，而复述里通常丢掉一个细节，那个细节恰好是本书要的。

标准版本：两排一样多的扣子，排得一样长，孩子说一样多；把其中一排拉开，孩子说拉开的那排更多。结论：他还没有获得数的守恒。

被丢掉的细节是：孩子被问了两次。

第一次问，他说一样多。然后大人当着他的面把一排拉开，再问一次。而那个“再问一次”本身，在孩子看来是一个信号——如果答案没变，为什么还要问？

后来的研究把这个细节做成了实验。若把移动做成一次“意外”（比如让一只玩具熊把扣子弄乱），或者只问一次，或者把问法从“哪排多”改成“哪排的扣子更多一些”，通过的年龄会明显提前。这不推翻皮亚杰的核心观察——确实有一个东西在四到七岁之间建立起来了——但它说明那个任务测到的东西里，混着一部分孩子对提问情境的解读。

这个细节对本书极其要紧，而且方向是双向的。

对本书有利的一面：它说明“材料以什么形状被递过来”确实是一个变量，而且是一个能改变结果的变量——问法一变，结论就变。而这正是本书说皮亚杰框架里缺的那个变量。

对本书不利的一面：它同样适用于本书自己的读数。编六第三十三章那张先在感量表五道题，每一道都是“问法”；一个孩子答“一直在那儿”，可能是他真的这么想，也可能是他猜老师想听这个。附录四里那条“原话必须记下来”的纪律，就是为这一条准备的——分数用于统计，原话用于分辨他是“没想过”还是“觉得这问题没意义”。

皮亚杰那批实验最大的遗产，也许不是那些阶段，是它让“任务的形状会改变结论”这件事第一次变成可查的。

七、一处对本书不利的读法

有一条反读，来自皮亚杰研究者，而且它相当致命。

他们会说：本书把“顺应”用歪了。在皮亚杰那里，同化与顺应是每一次认知活动中同时进行的两个方面，不是两个可以分开发生的事件；说“发生了同化而没有发生顺应”，在他的框架里近乎语法错误——任何一次同化都伴随着图式的某种微调。本书把一对描述同一过程两个方面的概念，读成了两个可以此有彼无的事件。

这个指控是对的，本书接受，并把话改准。

准确的说法不是“顺应没有发生”，是：

顺应发生了，但它发生在最小的幅度上——图式只做了容纳这一个新记号所需的最低限度的调整，而它所依附的那些更上层的理解一动未动。

那个孩子确实顺应了：他的图式里多了一个叫“分数”的格子，写作上下两个数字。这是一次真实的、微小的顺应。而“数是什么”“什么叫大”这两件事没有被触及。

改准之后，本书的判断不但不弱，反而更精确了，因为它可以被写成一个程度问题而不是有无问题：

问题不是顺应有没有发生，是顺应的幅度被材料的形状压到了最小。

一件被磨得极光滑的成品，恰恰是最容易被最小幅度地容纳的东西——它不与任何旧理解冲突，所以不需要任何上层调整。而这一句比原来那句强，因为它解释了为什么“教得越好，加固越快”（编四第二十二章）：教得越好，容纳所需的顺应幅度越小。

一个更精确的读法，把本书的一条推论从描述变成了机制。这一处是本书从皮亚杰那里借到的第二样东西，比第一样更值钱。

八、这一章在全书里的位置

皮亚杰把发生变成了可观察的，并给了本书顺应这个概念。他停在了主体一侧。

下一位跨过了这条线：他不再看孩子，他去看数学家自己，而且他看的不是他们如何成熟，是一个数学概念在一场争论里如何被反例一次次逼着改写。他给出了整场争论里唯一一次完整的、有材料的、可复核的发生史。

第十一章 拉卡托斯：定义是产物不是起点——一部有材料的反例史

判断卡片：拉卡托斯做到了本编其余五位都没有做到的事——他用一个完整的、有文献可查的历史个案，证明了定义不是推理的起点而是与反例搏斗到最后才勉强稳定下来的产物；这是整场争论里唯一一次不靠立场、只靠材料的胜利。而他仍然输了整体，因为他把这场搏斗完整地留在了数学家共同体内部：他证明了知识在共同体那里有发生史，却没有追问这段发生史被磨平之后，交到一个新手里会剩下什么。

一、他选了一个可以被核对的战场

前十章的争论都有一个共同的软处：双方举的例子都可以被对方重新解释。发现派说负数找得慢不等于不存在，发生派说必然感可能只是习惯。谁也拿不出对方无法消化的材料。

拉卡托斯换了打法。他挑了一条具体的定理，把它两百年的档案翻出来，逐年逐人地摆在桌上。

那条定理是欧拉多面体公式：对一个多面体，顶点数减棱数加面数等于二。 $V - E + F = 2$ 。

他要问的不是这条公式是真是假，而是一件此前没有人认真问过的事：在这两百年里，“多面体”这个词的意思变了几次？

答案是：变了很多次，而且每一次都是被一个反例逼着变的。

二、那场搏斗的实际经过

事情的顺序大致是这样的。

欧拉在十八世纪中叶提出这条关系，试了很多例子都对。然后反例开始出现，而且一个比一个难缠。

一对嵌套的立方体——一个空心立方体，里面挖一个立方体的洞： $V - E + F = 4$ ，不是 2。

一个带洞的环面型多面体：得数是 0。

两个只共用一个顶点的四面体：得数是 3。

所谓“刺猬”，一个由星形五边形面组成的小星形十二面体：算出来是 -6，而且更麻烦的是，人们对“它的面到底是什么”都吵不出结论。

面对这些反例，数学界的反应被拉卡托斯归成几种，而这几种归类是他全书最锋利的部分：

怪物拒斥：宣布那不是多面体。嵌套立方体？那根本不是一个多面体，那是两个。星形十二面体？那不是十二个面，那是六十个三角形。——这个办法的实质是改定义，而且是事后改，为的是把反例挡在门外。

例外拒斥：承认它是多面体，但宣布定理只对“单纯多面体”成立，把反例划为例外，公式退守到一个更小的地盘。

怪物调整：不改定义，改对反例的看法——星形十二面体不是有十二个星形面，重新看，它有六十个三角形面；这样一算，公式又对了。

引理并入：这是拉卡托斯认为唯一体面的一种。不去挡反例，而是回到证明本身，问这个反例究竟在证明的哪一步把路走断了；把那一步隐含的假设挖出来、写明、变成定理的一个条件。柯西的证明里有一步是“把多面体的一个面去掉后可以摊平成平面图形”——

嵌套立方体正是在这一步走不通。于是这个此前完全隐形的假设被写了出来，成了定理陈述的一部分。

三、他证明了什么

把这一部档案摆完之后，一件事变得不可否认：

"多面体"这个定义，不是这场推理的起点，是这场推理的产物。

它是被反例一次次逼着改写，最后勉强稳定下来的东西。而稳定之后，它被写进教科书的第一页，写成"定义：多面体是....."，仿佛推理是从它开始的。

这就是本书第十三章那个工序，被一份完整的历史档案当场抓获。

拉卡托斯还给了一个更精细的名字：证明生成的概念（proof-generated concepts）。像"单纯多面体""欧拉型""同胚"这些概念，不是先有概念再去证明，是证明过程中为了堵住某个漏洞而被造出来的；它们的边界形状，是被那个漏洞的形状决定的。

请注意这一条与本书的关系。本书说：光滑化磨掉土壤（逼出它的困境）与路径（走通它的曲折）。拉卡托斯在一个具体案例上，把被磨掉的那两样逐条捡了回来，而且捡回来的东西可以被任何人拿去核对。

这是整场争论里唯一一次不靠立场、只靠材料的胜利。编一那六位无一能对它做出有效回应——你没法说"多面体的定义一直就在那里等人发现"，因为它变了六次，每一次变化都有署名、有日期、有理由。

四、那么他为什么仍然输了整体

三条，逐条说。

第一条，他把这场搏斗完整地留在了共同体内部。

《证明与反驳》的形式是一间教室里的对话：一位教师和一群编了号的学生（甲、乙、丙……）来回辩论。但这间教室是一个文学装置——那些"学生"说的话，全部来自真实数学家的文献，脚注里逐条注明是谁在哪一年说的。那不是一间教室，那是一部被改写成对话体的档案。

于是一个此前没有人问的问题在他那里也没有被问：一个真的学生——一个还没有"多面体"这个概念的人——在这间教室里会怎么样？拉卡托斯笔下的每一位发言者，都已经是这场争论的合格参与者；他们已经知道什么算一个反例，已经能看出证明的哪一步可疑。他重建的是专家之间的发生史，不是一个新人身上的发生史。

第二条，他回答的仍然是那个问句。

他的副标题是"数学发现的逻辑"。他要打的是形式主义与欧几里得式的知识观，他要证明的是数学知识实际上是怎样成长的——这仍然是一个关于上游的问题：这个东西是怎么来的。他给出的答案与发现派相反，但问句一模一样。

按本书导论第三节的判断，凡是回答这个问句的人，都站在那道工序的下游指着产物争论上游。拉卡托斯把上游拍得极为清晰——但他仍然在下游。

第三条，编二那条判断在他这里也兑现了。

如果概念是被反驳推着长出来的，那么推动它的是什么？拉卡托斯的回答是理性的批判性对话：猜想、证明、反驳、再猜想。而这套对话的规范本身从哪来？他后来在科学哲学里给出了"研究纲领"，纲领有一个硬核——一批被约定不去反驳的命题，反驳的火力被引向外围的保护带。

硬核是他自己的先在。一个不接受反驳的核，正是他在数学史里所反对的那种东西的一般形式；他把它从概念层挪到了纲领层，并且把它正当化了。这不是他的失误，这是那笔账的必然去处：反驳不能反驳一切，总得有一处站着不动。

五、他与本书最近的一次，和分界

拉卡托斯是编二六位里离本书最近的，所以分界必须划得比别人细。

共同的部分：定义是产物；被磨掉的是与反例搏斗的那一段；教科书的次序是发生次序的倒置。这三条本书完整继承，不作任何修正。

分界在于三处：

其一，他处理的是概念在共同体里的成长，本书处理的是概念在个体那里的重新发生。一个数学概念在共同体里只长一次，在个体那里要长无数次；两者的机制不能互推。

其二，他要还给读者的是历史的那条路径，本书要还给学习者的是他自己走得通的路径。这两者往往不是同一条，而且不该是同一条——第三十章会论证，把两百年的争论史原样交给一个十岁的孩子，是另一种形式的递送成品。

其三，也是最要紧的一处：他假定只要把搏斗过程摆出来，读者就接得住。《证明与反驳》整本书的隐含教学观是“看见这场辩论，你就会明白定义是怎么回事”。第四编要论证的恰恰是这一步不成立——一段被完整呈现的搏斗，对旁观者而言仍然是一件成品，只不过从“光滑的定义”换成了“光滑的过程记录”。

拉卡托斯把土壤和路径捡了回来，然后把它们也磨光了，摆成了一本极其精彩的书。这一句听起来刻薄，但它正是本书第七编第四章那条纪律（还原不等于放录像）的历史来源，而且拉卡托斯是这条纪律最好、也最令人惋惜的例证。

六、原始文本细读：那本书的脚注在做什么

《证明与反驳》正文是一间教室里的对话：教师与编了号的学生来回辩论。而那本书真正的重量在脚注，这一点在复述里几乎总是被丢掉。

脚注在做一件事：把对话里每一句话的出处标出来。甲提出的那个“怪物”，脚注明是某年某人举出的反例；乙的那个辩护，脚注明是某年某人写的话；教师的某个提醒，脚注明来自某封信。

于是那间教室不是一个虚构的场景，是一部被改写成对话体的档案。

这个体例是拉卡托斯最了不起的一手，也是他被误读得最厉害的一处。它了不起，是因为它同时做到了两件通常做不到的事：它有一部真实档案的可核对性（每一句都能查到出处），又有一场现场辩论的推进感（读者跟着走，而不是读一份编年表）。

而它被误读，是因为那个形式太成功了。很多读者记住的是“那间教室”，把它当成一堂理想的探究课的样板，而忘了那些编号的学生全部是成年的、专业的、已经知道什么算一个反例的数学家。

这一处正是本章第四节那条判断的文本证据：他重建的是专家之间的发生史，不是一个新人身上的发生史。而这个证据就在脚注里——脚注恰恰证明了那间教室里没有一个真的学生。

再往下一层。那本书里有一件事从头到尾没有发生：没有任何一个人在对话中改变了他关于“什么算一个数学对象”的看法。他们改变了对“多面体”的定义，改变了对证明的看法，改变了对反例的处置办法——而“数学对象是被反驳推着长出来的”这件事，那间教室里的每一个人从第一页起就已经接受了。

换句话说：那间教室里的每一个人，改写权都是开着的。这本书因此完全无法回答，一个改写权关着的人在那间教室里会怎么样——而那正是编四第二十三章的题目。

七、一处对本书不利的读法

拉卡托斯的读者会提出一条反驳，而且它直指本章那句最刻薄的话。

本章第五节说："他把土壤和路径捡了回来，然后把它们也磨光了，摆成了一本极精彩的书。"

反驳是：这句话对任何一本书都成立，因而它什么也没说。任何把一个过程写下来的努力，产物都是一件成品；按这个标准，本书自己也在做同一件事，而且做得远不如他。用一条普遍适用的批评去打一个具体的人，是不公平的。

本书接受这个指控的前半，不接受后半。

前半是对的：这条批评确实对任何一本书都成立，包括本书——编三第十六章第四节已经写明了这一点，并且承认本书最可能的结局就是被压成一张贴在墙上的表。

不接受后半，理由是这条批评在拉卡托斯身上有一个别处没有的特殊性：

他那本书的全部论点，就是"把结果当起点是错的"；而那本书本身，是一件被摆到读者面前的结果。

这不是普遍的写作困境，这是一次自指的困境，而且他没有处理它。他没有在书里问过一句："我这本书被读者接住之后，读者身上会发生什么？"——他假定，只要把搏斗摆出来，读者就接得住。

而本书至少问了这一句，并且给出了本书自己的失败预言与一条识别码（编三第十六章第四节）。这不足以让本书免于同样的命运，但它是两件不同的事：做了同样的事而没有意识到，与做了同样的事并且写下了它会怎样失败。

这一处的分界，也正是本书要求读者用来判自己的那一条。

八、这一章在全书里的位置

拉卡托斯给了这场争论第一份可核对的材料，也第一次把工序的痕迹逐条捡了回来。他停在了共同体的门口。

下一位跨出了那道门，而且跨得比任何人都远：他不看数学家，他看实验室；他不问知识是怎么长出来的，他问一件已经长成的东西，是如何把它长出来的那段过程从自己身上抹掉的。这是本编唯一一次换了问句的人——而他为此换了一个学科。

第十二章 拉图尔与伍尔加：一件事如何把它的来路从自己身上抹掉

判断卡片：拉图尔与伍尔加是本编唯一换了问句的人——他们不问“这东西是被发现的还是被造出来的”，而问“它在稳定下来的过程中，它的来路去了哪里”，并且给出了这道工序在自然科学一侧最完整的机制描述。这是本书直接的方法来源。而他们仍然输了整体，原因有三：他们停在了那件成品上，没有跟着它走进任何一个接收者；他们为了换问句而换了学科，于是结论回不到被描述的那些学科里去；他们的结论被用一句“事实是被建构的”概括，而这一句正是本书立挡板挡住的那一步。

一、他们干的是一件田野工作

一九七〇年代中期，一位年轻的法国人类学家进驻加州一间神经内分泌实验室，蹲了两年。他不懂那里的科学，他也不打算懂——他用的是人类学家进入一个陌生部落时的办法：看他们每天做什么，记录他们说些什么，追踪一张纸从这台仪器走到那篇论文的全过程。

结果是一九七九年的《实验室生活》，副标题原本是“科学事实的社会建构”。

这一手的价值在于它绕开了整场争论的僵局。前十一章那些人，无论哪一派，用的都是同一种材料：已经写好的科学与数学，加上论证。拉图尔与伍尔加用的是尚未变成科学的那一堆东西——记录纸、噪声、被扔掉的样品、走廊上的争论、被划掉的句子。

二、他们看见的那件事

他们跟踪的核心对象是一种叫促甲状腺激素释放因子的物质，学名可以简写为 TRF。今天它是教科书里一条平淡的条目：一个确定的三肽，结构是焦谷氨酸—组氨酸—脯氨酸酰胺。

倒着往回看那两年的记录，他们发现了一件此前没有被系统描述过的事——一个陈述在稳定下来的过程中，它句子里的“情态词”会被一层层剥掉。

最初的说法是：“有人报告，在某种制备条件下，观察到某种活性。”

然后是：“某某等人认为，这种活性可能对应于某个三肽。”

然后是：“TRF 大概是焦谷氨酸—组氨酸—脯氨酸酰胺。”

最后是：“TRF 是焦谷氨酸—组氨酸—脯氨酸酰胺。”

请注意最后一句里消失了什么：没有人了，没有条件了，没有时间了，没有“大概”了。一个原本挂满了限定的句子，变成了一句不挂任何东西的陈述。

而下一步是他们全书最要紧的一个词。他们把它叫作倒置（inversion）：一旦这个句子稳定下来，关于它的叙述就会反转过来——不再说“我们经过种种努力把它做成了这样”，而说“它一直就是这样，我们终于把它找到了”。那些仪器、那些失败的批次、那些争论，不但从句子里消失了，还从关于这件事的历史叙述里消失了。

这就是本书所说的光滑化，被人类学的办法在两年之内当场拍了下来。

三、他们比本编前五位多给了什么

三样，都是本书直接在用的。

其一，他们给了这道工序一个可观察的指标。拉卡托斯要翻两百年的档案，皮亚杰要设计任务去问孩子。拉图尔与伍尔加只需要数一件事：一个陈述周围挂着的限定词，时间是在增加还是在减少。这个指标便宜、可复核、不依赖任何立场。本书第十三章那条“看定义摆在第几段”的判据，与它是同一族东西。

其二，他们指出了倒置是系统性的，而不是个别人的修辞。没有人决定要抹掉那段过程；抹掉是写作规范、期刊格式、引用惯例共同作用的自动结果。这与本书第二章那条判断完全一致：光滑化的每一次制度化，不是由某个人决定的，是由某个成功决定的。

其三，他们给了一个后续的词：黑箱化。一事实一旦稳定，它就变成一个黑箱——被越多的人使用，就越没有人打开它，也就越难被打开。使用本身是封箱的动作。这一条与本书第四编要说的封写形状极近，两者的分界在第二十四章逐条给出，这里只提要点：他们的黑箱封在共同体一侧（没有人再去追问那个事实是怎么造出来的），本书的封写封在学习者一侧（封住的不是对那个对象的追问，是他对自己底盘的改写权）。这两件事可以分开——一个人可以完全知道分数是被人造出来的（黑箱是开的），却仍然不期待任何数学对象要求他改变看法（写保护仍在）。

四、第一处输：他们停在了成品上

他们跟着一个陈述从噪声走到教科书，然后停下了。

教科书之后发生的事，他们没有跟。

那句“TRF 是焦谷氨酸—组氨酸—脯氨酸酰胺”，进了教材，被一个学生读到。这个学生身上发生了什么？他有没有因此改变他关于“激素是什么”“一个分子如何被确定”的既有理解？还是他只是把这一条存进了要背的清单？

这个问题不在他们的视野里，而它正是本书的全部题目。他们研究的是生产，本书研究的是接收；他们的对象是一个陈述如何获得稳定，本书的对象是一个已经稳定的陈述如何在一个新的人那里重新变得不稳定——而不重新变得不稳定，它就长不进去。

这一条不是批评他们没做完，而是标定分工。但它有一个实际后果：从他们的框架里推不出任何教学上的处方。你知道了事实是被造出来的，然后呢？对着一个十岁的孩子，这句话什么也不能做。

五、第二处输：换问句的代价是换学科

拉图尔是本编唯一一个真正换了问句的人——从“它从哪来”换成“它在稳定过程中失去了什么”。本书全书都在受益于这次更换。

但他为了换这个问句，离开了他所描述的那些学科。

《实验室生活》是一本人类学著作，它的读者是社会学家与科学论学者，不是神经内分泌学家。那间实验室的科学家读到它时的反应，大体上是被冒犯。此后二十年，这条线越走越远离自然科学，最终在九十年代撞上了那场被称为“科学大战”的公开冲突，而那场冲突里发生的事——一篇故意写得胡说八道的稿子被一份文化研究刊物照登不误——把整个领域的公信力打掉了一大截。

于是形成一个尴尬的局面：一套关于科学如何运作的、相当准确的描述，被它所描述的对象整体拒收。

本书要从这里领一条教训，而且是给自己领的：

换问句是必要的，但如果换了问句就必须离开原来的学科，那么这个新问句在原学科内部仍然等于不存在。

这条教训直接决定了本书的一项纪律：本书全部论证都在数学与数学教育内部进行，用的是数学的例子、教学的例子、可以在教室里被核对的判据。本书不打算成为一本关于数学的社会学著作。

六、第三处输：那句概括，正是本书挡住的那一步

《实验室生活》最初的副标题里有“社会建构”四个字。这四个字后来成了整条线的标签，也成了它被攻击的靶心。而它被读成的意思通常是：事实是被造出来的，所以事实不是真的。

这一步，本书在第十三章第七节已经立了挡板挡住——从“稳定特征是成果不是起点”滑到“真理是被造出来的”，只有一步，而这一步一旦迈出，全部判断都会被正确地归入相对主义。

这里值得记一笔的是：拉图尔自己后来也不接受那个读法。第二版把副标题里“社会”两个字去掉了。二〇〇四年，他写了一篇后来被反复引用的文章，公开担忧他那套批判工具被用歪了——当“事实是被建构的”这句话被拿去否认气候变化这类有充分证据的结论时，他发现自己教出来的招式正在被用来做他最不愿意看到的事。

一个人在自己那条线走了二十五年之后，公开承认它有一个被误用的通道，这在思想史上是罕见的诚实。但诚实不解除结构：那个通道之所以存在，是因为他们没有把“来路是被造的”与“结论不为真”这两件事分开。本书从第一页就要求把它们分开，而这个要求不是本书的谨慎，是本书从他这里学到的教训。

七、原始文本细读：那个副标题被删掉的一次

《实验室生活》一九七九年初版的副标题里有“社会建构”四个字。一九八六年第二版，“社会”两个字被删掉了。

这个删改极小，几乎没有人注意，而它是本编能找到的最精确的一个自我修正。

删掉的理由，作者自己在第二版的后记里交代过：如果一切都是社会建构的，那么“社会”这个词就不再有区分力——它不再指出任何东西，因为没有任何东西不属于它。一个用来解释一切的词，等于没有解释。

而更要紧的是它揭示的那个滑坡的形状。

他们那本书做的是一件很具体的工作：跟踪一个陈述从噪声走到教科书，记录它周围的限定词如何一层层剥落，并指出这个剥落是系统性的。这是一份关于过程的描述，落在编五第二十八章那张表的“接收者一侧”——或者更准确地说，落在“生产与流通一侧”，总之不在“命题的真值”那一侧。

而“社会建构”这个标签，把它整个搬到了另一侧。它被读成：这些事实之所以为真，是因为社会决定它为真。

那两个字被删掉，是作者试图把自己的工作搬回原来那一侧的一次动作。而它失败了——标签已经贴牢，此后二十年的争论都是围绕被误读的那一侧进行的，直到二〇〇四年那篇公开担忧的文章。

这一处是本书全书最重的一条教训，而且是负面的教训：

一套关于工序的描述，若不在第一页就把两侧分清，它必定会被读成关于真值的主张；而一旦被这样读了，删两个字是收不回来的。

本书为这一条付出的代价是显而易见的：同一道挡板在本书里立了四次（编三第十三章第七节、编四第二十二章第五节、编五第二十八章第五节、编六第三十四章第一节），而且前言里还立了第五次。这在写作上是笨拙的、重复的、读起来烦人的。

本书接受这份笨拙。因为那两个字被删掉的那一次说明，在这件事上，笨拙比优雅便宜。

八、一处对本书不利的读法

一条对本书方法论的反读，而且它是编二里最难回答的一条。

反读是：本书从他们那里学了方法，却拒绝了他们的结论，这个组合是不是站不住？

具体地说：他们的方法（跟踪一个陈述如何稳定、限定词如何剥落、来路如何从叙述中消失）之所以有力，恰恰是因为它不预设那个陈述是否为真——它对所有陈述一视同仁地做同一套跟踪。而本书一边用这套跟踪，一边在命题一侧守着一道“真值不依赖任何人”的分界。若真值确实独立，那么那套跟踪跟出来的东西，就只是关于人怎么写文章的社会学，与知识本身无关；若那套跟踪触及了知识本身，那么本书守的那条分界就守不住。

这个两难是真的，本书必须正面回答。

回答是：那套跟踪跟出来的东西，确实与命题的真值无关；而它与“这件知识如何来到一个人身上”完全相关。

本书用它，用的只有后半。当一个陈述周围的限定词被剥光、它的来路从叙述中消失时，那个陈述的真值一分未变——它原来真，现在还是真。变的是它被交出去的形状，以及一个接住它的人手里拿到了什么。

于是那个两难的两个角，本书各占一半而不冲突：跟踪触及的不是知识的真，是知识的可接性。

而这也解释了本书为什么在编二把他们排在最后一章：他们是六位里唯一换了问句的人，本书的方法直接来自他们；而他们把那个换来的问句，用在了一个使它被误读的位置上。本书学的是那个问句，不是那个位置。

九、这一章在全书里的位置

拉图尔与伍尔加给了本书方法：换问句，去看工序，找可观察的指标。本书编三整整一编，是这个方法在数学与数学教育上的执行。

而他们停下的地方，正是本书第四编开始的地方——那件已经磨光的成品，被交到一个人手里之后，那个人身上发生了什么。

编末小结：六次反攻为什么都赢在局部、输在整体

一、六次胜利各自的位置

先把账算清楚。这六次不是六次失败，本编从头到尾都在说这件事。

章	人	赢在哪一处
七	亚里士多德	拆掉了那个多余的世界，形式回到事物之中
八	维柯	说出"知道一件东西就是知道它的来路"
九	布劳威尔	在数学内部真刀真枪地打了一仗，并且自己出钱
十	皮亚杰	把发生变成可观察、可记录、可复核的事实
十一	拉卡托斯	用一部可核对的档案证明定义是产物不是起点
十二	拉图尔与伍尔加	换了问句，并给出这道工序最完整的机制描述

六次都是实打实的。发现派对其中至少三次（第十、十一、十二章）没有能力做出有效回应——你没法用论证去反驳一批可以复做的观察，也没法说一个变了六次的定义一直就在那里。

二、那个相同的失败

然而，把六章末尾那几句放在一起，会看到一个整齐得让人不安的形状：

- 亚里士多德把先在从世界赶走，它从努斯那里走了回来。
- 维柯把确定性归给"我们造的"，代价是数学不再关于世界——他为了守住一侧，交出了另一侧。
- 布劳威尔把先在从数学对象那里赶走，它从时间的原始直观那里走了回来。
- 皮亚杰把发生变成可观察的，而他那套阶段随后被回溯性本体化，成了"这个年龄还不能理解"这句不再被追问的判词。
- 拉卡托斯把定义还原为产物，而推动这场还原的硬核是一批被约定不去反驳的命题。
- 拉图尔与伍尔加把事实还原为过程，而他们把先在移给了网络与社会，并且为此换了学科。

于是本编的承重发现可以写出来了：

每一次反攻，在它取胜的那一处，都必须为自己另立一个先在。

而这不是六个人各自的疏忽，它有一个结构性的理由。本书原来给的说法是"问句的语法里必须有一个主语"，那太笼统；准确的版本取自导论第五节那篇哲学史总纲，它把这件事拆成了三个一件都省不掉的动作：

第一，选定条件。一件事的条件是无穷的，讲述者必须裁决哪些"算数"。裁决需要一条相关性标准，而这条标准不能来自这场讲述本身——讲述还没开始。

第二，切出路径。路径是连续的；从哪一步讲起、在哪一步收束、剪掉哪些岔路，都是切割。切割需要一条起点与粒度的标准，同样不能内生。

第三，裁决为真。讲述完成后宣称"事情确实是这样发生的"，这需要一套真值标准；若这套标准又要靠另一场发生叙述来奠基，回退无穷。

三条标准都只能被预设。而预设长期使用中硬化、结壳、沉底——在使用者眼里，它们不再是选择，而是"本来如此"。一块新的地基落成了。

于是那句结论：这不是失误，是讲述发生这个行为的必要开销；不是哪一位的缺陷，是每一位的成本。

发现派把先在放在对象那边，发生派把先在放在构造者那边——两派各自都需要一个先在，而需要它的理由现在可以逐条检查了。

三、这就是这场争论无法收敛的结构原因

编一末尾指出，发现派六次立法用了五个不同的户头，而它们各自都能自洽地解释全部现象。现在可以把另一半补上：发生派六次反攻同样用了六个不同的户头，而它们各自也都能自洽地解释全部现象。

两派合起来十一个户头（欧几里得不设户头，他设的是格式），没有一个能被现象裁决。

理由在导论第三节已经给过，现在它被两编共二十四位思想家的实际做法证成了：这个问句的提出条件，正是那道工序的产物。争论双方都站在下游，指着一件已被磨平的产物争论它上游的出身，而磨平这道工序恰恰是一道把上游抹掉的工序。证据不足不是因为大家找得不够勤，是因为含着那个信息的东西在它成为证据之前就被磨掉了。

一场不含裁决所需信息的争论，可以进行任意长的时间。两千五百年不是一个失败的时长，它是一个正常的时长。

四、六位里有一位半跨了出去

必须记下例外，否则本编会显得太整齐。

拉图尔与伍尔加换了问句：不问"它从哪来"，问"它在稳定过程中失去了什么"。这次更换是决定性的，本书编三全部方法来自它。他们没有跨过去的那一半是：他们停在了成品上，没有跟着它走进任何一个接收者；而且为了换问句，他们离开了被描述的那些学科。

拉卡托斯做了半步：他把被磨掉的土壤与路径逐条捡了回来，但他假定只要把搏斗摆出来读者就接得住，于是他捡回来的东西又被他磨成了一本极精彩的书。

皮亚杰给了本书概念上的半步：顺应就是本书说的改写。他停在了主体成熟这一侧，没有把"材料以什么形状被递过来"当作一个变量。

三个半步加起来，恰好指向同一个缺口，而那个缺口就是本书第四编：

没有人跟着那件磨光的成品，走进一个具体的、还没有它的人。

五、三次逃逸测试：有没有人走出去过

前五节判定六位反攻者无一走出。但这个判定有一个缺口：本编只检验了六位反攻者，没有检验"有没有别人逃出去了"。

一个归纳命题的诚实程度，取决于它如何对待看起来的反例。本节补上这一步，材料取自导论第五节那篇哲学史总纲的第十一章；三个测试的结论本书完整接受，并在此转述其要点。

测试一：皮浪与古代怀疑派——最接近成功的逃逸设计。

皮浪主义者看起来是天生的绝缘体：他们不宣称任何磐石，对每一个独断宣称都配上等强度的反宣称，然后悬搁判断。更精妙的是那个自泻设计——怀疑论的论证像泻药，把病排出的同时把自己也排掉，不留下任何立场，包括“应当怀疑”这个立场。

这是哲学史上唯一一次预装了自我拆除程序的思想产品，比维特根斯坦那个梯子早了一千七百年。

但有两处渗漏。其一，“悬搁带来安宁”是一个未悬搁的因果承诺——凭什么不下判断就会安宁？这条许诺从未被配上等强度的反论证。其二，“论证均衡”预设了一杆衡量论证强度的秤，而秤没有被悬搁。

结论：最好的逃逸设计也只做到了不建造——而它的代价是彻底的：怀疑派在哲学史上没有承重墙，只有排水沟。

测试二：蒙田——不奠基者不进序列，也不进地基。

蒙田用散文代替体系，没有第一原理，没有推演，观点自相矛盾也不修剪，因为“我描绘的不是存在，是经过”。他确实没有进去：没有磐石宣称，就没有可解构的对象；后世对他只有致敬与引用，没有显形——你无法拆一座本来就宣布自己是帐篷的建筑。

代价同样明确：蒙田在哲学史上是伟大的旁注，不是承重结构。笛卡尔读他、受他刺激，而近代哲学的地基是笛卡尔立的。帐篷启发了大厦，大厦不盖在帐篷上。

测试三：后期维特根斯坦——序列内部的对照组。他不立论题，只做治疗；但治疗预设诊断标准，而追问链在“生活形式”处被宣布到站。他没有逃出去，他只是把停靠点修得极其低调。

三个测试并排，是一把刻度尺：皮浪拆到连拆除令都拆掉（代价：无所建造），蒙田根本不开工（代价：不入地基），维特根斯坦拆完别人后留了一块最小的免检地（代价：进序列）。

于是得到一条边界定理，本编接受它，并把它当作本编那条判断的完整形式：

逃出的充要条件是不宣称；而不宣称者不奠基，不奠基者不出现在哲学史的承重墙上。

这不是本编归纳的侥幸，是奠基这个行为的语法。

六、科学与数学：两个更大的测试，以及数学那份双重判决

上一节三位是哲学内部的。还有两个更大的测试对象，而其中第二个直接关系到本书的题目。

测试四：科学。科学看起来是逃逸的最佳候选——它似乎不供奉任何磐石，一切理论可修改，一部科学史就是自家磐石的连环爆破史。

但检查它的申报单，货舱并不空。数学的可用性（为什么宇宙偏偏听得懂微分方程，天天在用而无人能证）；归纳的实践（休谟的问题从未解决，只是被实验室的日常悬置了，而这一默认写不进任何一篇论文的方法节）；仪器链的信任（每台仪器由上一代仪器校准，链条的源头是感官与约定）；以及最有趣的一件——“可证伪性”这条标准自身不可证伪，它不是科学命题，是立法。

所以科学也没逃出去。但它与三十环有一处决定性的不同：它把序列制度化了。同行评议、可重复性、公开数据——这些建制等于把“下一环的拆迁队”提前雇进了自己家；而且它的免检品大多摆在明处（教科书第一章通常直说“本学科假定自然齐一”）。

科学没有逃出序列，它做了另一件事——与序列签了长期合同：以持续挨拆换取持续承重。

这一条对本书极其要紧，因为本书编六第三十三章那三个预注册实验、三条撤稿级条件，抄的正是这份合同的格式。本书对自己的全部安排，不过是把这份合同也签一遍。

测试五：数学——而这一个直接是本书的主场。

数学看起来是“被发现”的铁证：定理一经证明万世不改，任何文明算出的圆周率都相同。若有什么东西是被发现的，还能不是数学？

但序列在数学内部同样留下了完整的作业记录。非欧几何显形了“唯一真几何”——平行公理换掉照样自治，几何从“空间的真相”降格为“公理的选型”。集合论悖论与不完备定理接连显形了“完备地基”之梦。直觉主义与构造主义从工序层显形——连“什么算一个证明”都有学派史。

可另一面同样硬：数学的强制力毫发无损。你可以选公理，选定之后推论就不由你；任何文明、任何星球，只要接受同样的前提，就必然抵达同样的定理。

于是数学得到一份双重判决，而这份判决本书全书采用：

作为公理选型与概念工程，它是发生的一一有历史、有派系、有身体来源；作为选定前提后的推论强制，它最接近“不由人”。

那篇总纲给了一个极好的比方，本书原封采用：

数学像棋。马走日是发生的（规则史可查），但规则一定，“当头炮之后马来跳”的最优应着就不由任何人了。序列拆得掉“唯一真棋”，拆不掉“落子无悔”。

判决：数学半只脚在序列外——而那半只，恰恰踩在“接受前提”这个发生动作上。

这份双重判决是本书编五第二十五章那条改判的完整形式，而且它比本书原来给的更好。本书原来说“两派对任何可观察的事都不作出不同预测”，是一条关于证据的判断；这份双重判决是一条关于对象的判断，而且它把两派各自看见的那一半指出来了：发现派看见的是推论强制那一半，发生派看见的是前提选取那一半，两派各自看见的都是真的。

这也解释了为什么这场争论既不可裁决又不可解散——两派站在同一个对象的两个面上，而那个对象确实有两个面。

七、与那篇哲学史总纲的分工

导论第五节已经把分工写全，此处只重复四条中最要紧的两条，因为编二是最容易与它混淆的一编。

其一，本编的承重判断不是新的。“每一次反攻在它取胜的那一处都必须为自己另立一个先在”，就是那篇文章的第三冲程“偷运”；那篇处理了三十环，本编只有六位。本编在这一条上是它的一个子集，而且是一个小得多的子集。

其二，本编的结构论证已按那篇的版本替换。上一节那条“问句的语法里必须有一个主语”是本书原来的说法，它太笼统。准确的版本是那三条不可省的动作——选定条件、切出路径、裁决为真；三条标准都只能被预设，而预设长期使用中硬化、结壳、沉底。

偷运不是失误，是讲述发生这个行为的必要开销。

而本编真正属于本书的，只有一件事，且它不在这一编：接收端。那篇文章记录了三十次显形，而它里面没有一个学生。编四要处理的正是那个位置。

八、这一编怎么派生母题

部件一（发现是发生的一个时相，不是对立面）：本编六次反攻，无一是要取消发现，六次都是要把发现还原为一段过程的产物。亚里士多德把形式放回事物，拉卡托斯把

定义放回反驳史，拉图尔把事实放回实验室——三次动作完全相同。而它们与发现派并不是在争论同一件东西的两种性质，是在争论同一件东西在哪一个时相上被指认。

部件二（争论争的是一份归属错觉，且不可裁决）：本编第二、三节已经证成。十一个户头，没有一个能被现象裁决，因为现象里没有那个信息。这是本编对母题最直接的贡献，而且它是由两编合起来才成立的——单看一侧，会以为对面只是固执。

部件三（代价在下次）：本编末尾的三个半步指出了那个共同的缺口。六位都没有跟着成品走进一个接收者，因此六位都没有可能发现第四编那件事。这不是他们的疏忽，是他们的问句不到那里。

本编级可推翻条件：若能在发生派传统中指出一位思想家，他在否认对象先在之后，没有把先在移交给任何一个新的户头（无论是认识能力、原始直观、发展阶段、批判规范还是社会网络），且其体系仍能说明必然性从何而来，则本编“每一次反攻都要另立一个先在”的判断被推翻。本书作者已尽力寻找而未找到；最接近的是拉图尔，因为他不解释必然性——而不解释，与解释了但另立一个先在，是两种不同的结局，前者留下的是空缺，后者留下的是新的地基。

编三 工序：光滑化的解剖

第十三章 三重操作与一个名字：回溯性本体化

判断卡片：把成熟态当起点，不是一次疏忽，是一个有确定操作步骤的工序，且这个工序有一个可指认的名字——回溯性本体化：一件稳定化的成果，被反过来当作它自己得以稳定化的那个世界的原始样态。编一那六次立法，是同一个动作在六个不同高度上的六次执行。

一、先给那六次立法一个共同的名字

编一逐章指出了六次可指认的操作，并在编末给出了它们的共同语法：六次都只问"这个对象从哪来"，从不问"它怎么被接住"。但共同语法还不是共同动作。语法说的是他们没问什么，动作说的是他们做了什么。

那个共同动作，可以命名为：

回溯性本体化——一件在特定条件下被稳定化出来的成果，被回溯性地提升为"世界本来如此"的证据。

请注意这个名字的三个部件，缺一不可。成果：它是被造出来的，有条件、有阶段、有代价。回溯性：这次提升不发生在它被造出来的时候，只发生在它已经稳定之后，由后来者做出。本体化：提升的方向不是"这个说法很好用"，而是"世界原本就是这样"。

把编一那张户头表按这个名字重读一遍，六次操作立刻显出同一个骨架：

- 完美三角形本是一条差异路径被磨到极限时涌现的同一性，被提升为理念世界里的原型。
- 公理体系本是把已有几何整理为可核查整体的一次工程成果，被提升为几何本身的次序。
- 几何观念本是在真实作图与推演中长出来的东西，被提升为灵魂中的天赋。
- 欧氏空间本是一件由古希腊作图实践与第五公设这个具体选择长出来的历史产物，被提升为直观的先天形式。
- 数本是在计数、比较、记账这些活动中被逼出来又被逐步严格化的东西，被提升为第三领域中的客观对象。
- 集合论的对象本是一套为收拾无穷之乱而造的语言，被提升为可以被直觉看见的实在。

六次，六个不同的高度：从另一个世界，到一本书的次序，到灵魂，到主体形式，到一个逻辑领域，到一种类似感知的直觉。高度一次比一次低、一次比一次难攻，而动作一次未变。

二、这个工序的三个步骤

回溯性本体化不是一个笼统的态度，它有三个可分辨的具体操作。这三步就是本编要解剖的那道工序，本书称之为光滑化。

操作一，磨掉土壤。逼出这个对象的那个真实困境被删除。课本不再说"当年人们遇到了什么走不通的问题，才不得不造出这个东西"，而直接给出成品。于是接收者无从知道这个对象是为解决什么而存在的。

操作二，磨掉路径。从困境走到对象的那条曲折之路——试错、命名、修正、收敛——被删除。只呈现路径的终点，即最终结晶出的定义，而不呈现走这条路的过程。

操作三，把显露再摆为起点。剩下的那个光滑的形，被重新摆放为一个起点而非结果。

三步合起来，可以写成一个简洁的刻画：

发现 = 发生 - 路径 - 土壤

第三步是最隐蔽、也最具决定性的一步。前两步只是做了减法，尚未颠倒次序；真正的颠倒发生在第三步：它把发生链的终点搬到最前面，当作一切的开端。减法只是丢失，颠倒才是本体化。一个只被减了两步、但仍被明确标注为“这是某某在某年为解决某问题而做出的”的对象，不会产生先在感；只有当它被摆到起点、并且它前面什么也没有的时候，“本来就在那里”这个印象才成立。

由此可以给本编一条贯穿的操作判据：

判断一段呈现有没有执行光滑化，不看它省略了多少历史，只看它把定义摆在哪里。

这条判据在第十五章会被用来读教科书，在第十九章会被用来读布尔巴基。

三、这个工序在成熟领域看不出毛病

必须立刻说清楚，否则整编会被读成一份对严谨性的攻击。

在稳态阶段，这个工序几乎看不出任何毛病，因为系统确实在不断地复制成功。概念被归入范畴，复杂被折叠为模型，多样被归并为规律；这个压缩过程本身完全正当，而且是知识得以公共化的唯一办法。一门成熟的、边界清楚的、变量可控的学科，用光滑化的方式教学与传播，效率极高、损耗极小。

代价只在三种时刻才显形：变形期、跨域期、涌现期。既有范畴容纳不下新对象，既有模型解释不了新现象，既有规则指导不了新生成。这时系统的典型反应不是回到发生问题，而是在末端加密——增加指标、扩展分类、精炼模型、膨胀术语，用更复杂的结构语言维持表面上的解释力。

这个状态可以命名为同一性内卷：解释越来越密，突破越来越难。它的诊断特征很好认——术语的增长速度超过了它能解释的新现象的增长速度。

本书对它的判断是结构性的：内卷不是从业者不努力的结果，恰恰相反，它是极度努力的结果，只是努力全部落在了工序的下游。

四、代价一：生成问题被外包出去

回溯性本体化完成之后，有一件事在系统里没有位置了：这个东西是怎么来的。

它没有被否认，它是没有位置。而一个问题一旦在一个体系里没有位置，它并不会消失，它会被外包。本书要指出它被外包到了三个地方，而且三个都在这个体系之外：

生成问题被外包给运气，创新机制被交给天赋，结构更新被交给偶然。

这三句是同一件事的三种说法，而且它们在日常语言里几乎无处不在。一项突破被说成“灵光一闪”“碰上了”；一个人做得出而另一个人做不出被说成“他有那个天分”；一次范式转变被说成“时机到了”。

请注意这三种归因的共同形状：它们都不可训练。运气不可训练，天赋不可训练，偶然不可训练。于是一个把生成外包出去的知识体系，在原理上不可能有一套关于“如何生成”的公共工艺——不是它还没有造出来，是它的语法里没有这一格。

这一条在编四会以一个远为尖锐的形态回来。因为同样这三种归因，在课堂上有一个具体得多的名字：“这孩子有数学细胞”与“这孩子没数学细胞”。第三十四章那条“天生会／天生不会”的错觉，正是“创新机制交给天赋”这句话落到一个十岁的孩子身上时的样子。在研究界它是一句无害的口头禅，在教室里它是一份终身判决。

五、代价二：中段被系统性降格

第二重代价关于位置，而且是一个可以直接翻开任何一篇论文或任何一本教材来核查的事实。

发现学的语法擅长描述结果，却把"从无序到有序、从噪声到特征、从偶然到稳定"的那一段——本书称为中段——降格为可选装饰。这个降格不体现在措辞上，体现在排版次序上：

先给出定义与分类，再给出结论与模型，最后附加机制讨论与背景说明。

于是机制讨论成了"结论之后的说明"，而不是"结论之前的发动"；背景说明成了"外部条件的注释"，而不是"内部生成的必需"。

这一句是本编最要紧的观察之一，因为它把一个关于知识观的抽象判断，落成了一件可以数的事：打开任何一本教材的任何一章，看"这个概念是为解决什么而出现的"这句话出现在第几段。绝大多数情况下，它要么不出现，要么出现在末尾的"背景"或"拓展"里。

这个位置安排会逐步塑造一整套认知习惯：先要结果，后补解释；先要结构，后谈发生；先要可用，后问何以可用。其后果不是解释不重要，而是解释被迫以补丁的形式存在。

补丁式解释在成熟领域尚可运转，因为稳定结构已经长期固化，补丁足以应付渐进扩展。但它在两种情形下会立刻暴露无力：面对复杂系统与跨域涌现时（研究一侧），以及面对一个还没有这个对象的学习者时（教学一侧）。两侧失效的原因相同：决定成败的恰恰是被降格的那一段。

六、代价三：结构语言的独占

第三重代价此前没有被本书处理过，它关于语言。

一套呈现只用一种语言时，会发生什么？发现学的语言是结构语言：以名词化、范畴化、层级化为主，以"是什么"为轴心，擅长定义、分类、规则与框架。它的优势是清晰，而且这个优势是真的——没有它，公共协作不可能。

但当结构语言成为唯一的语言时，会出现一种很难被指认的贫血：句子可以非常精确，却缺少推进；术语可以非常齐整，却缺少张力；逻辑可以非常严密，却缺少生成。

在教学上，这种贫血有三个可观察的表现：

- 学习被等同于"记住定义并学会归类"；
- 理解被等同于"能够复述结构并套用规则"；
- 掌握被等同于"能够在结构框架中填入例子"。

三条都成立时，知识确实可以被规模化复制。问题在于，被复制的是一具名词化的骨架。一个概念的推进（它是被什么逼出来的、在哪一步卡住、怎么转过来的）与它的牵连（它一旦成立，别的哪些东西必须跟着改）——这两样在纯结构语言里没有句法可以承载。说不出来，不是因为说的人笨，是因为那套语言里没有那个位置。

本书对这一条要做一处收窄，因为原初的表述容易走得太远。这不是主张结构语言有害，也不是主张要用更"生动"的语言去教数学。那是一个常见且有害的误读，它会导向把数学课上成故事课。本书的主张很窄：

结构语言应当回到它应有的位置——它是成果，是暂时的中心，是沉淀物；它必须能被推进与牵连续续改写，否则它就从成果退化为枷锁。

判据仍然是位置的，不是风格的：定义在第几段。

七、本书与这三重代价的关系，以及一处必须挡住的滑坡

三重代价——本体错置、中段降格、语言独占——是本编的诊断框架，也是本书接受的部分。但这里必须立一道挡板，而且要挡在最容易滑过去的那一步上。

从"稳定特征是成果不是起点"，滑到"真理是被稳定化出来的可重复差异"，只有一步。这一步本书不走。

理由在第五章已经写过，这里重申并写死：弗雷格的分界必须守住。一个数学命题的真值不依赖任何人的心理过程，也不依赖任何共同体的稳定化工艺；就算全人类明天都开始认为 $2+2=5$ ， $2+2=4$ 仍然是真的。本书全书讨论的是知识如何来到一个人身上，不是命题凭什么为真。

这一处之所以要专门立挡板，是因为它是本书自己人最容易滑过去的地方。一个已经接受了"光滑化"这套诊断的读者，会很自然地觉得下一步就该是"所以真理也是被造出来的"——这一步在逻辑上不成立，且一旦迈出，本书的全部判断都会被正确地归入相对主义而作废。

分界可以写成一句：

本书主张：学习者身上那种"它本来就在"的感受，是被制造出来的。

本书不主张：数学命题的必然性是幻觉。

前者关于人，后者关于命题。两者不能互推。第二十八章会把这条分界写成一一把可裁决的刀，用来重审实在论与建构论那组对峙——而那一章会论证，那组对峙之所以两百年不决，正是因为双方都在同时谈论这两侧，而且换来换去自己不觉得。

八、一个可以直接用的分界判准

本章最后给出一个压得最短的判准，本编其余各章都靠它来判：

能否回答"特征如何诞生"。

一个体系若只能回答"特征是什么、是否成立"，而不能回答"它如何从一堆还没有形状的东西里稳定下来"，它就仍在发现学的语法里。一个体系若能说出稳定化的条件链条、给出中段的机制、并把一次成功沉淀为可以再走一遍的工序，它就进入了发生学的语法。

这个判准的好处是它不问立场，只问能不能答出来。一个自称建构主义的教材，若它的每一章仍然从定义开始，它在这个判准下仍是发现学；一堂安静的讲授课，若教师把困境摆出来、把路径带学生走通、并验了牵连，它在这个判准下是发生学。判据永远是工序，不是标签。

九、一处可核对的证据：三个词的词源

"回溯性本体化"是本书构造的一个名词，而它描述的动作在语言里留下了痕迹。三个词，任何一部词源词典都可以核对。

"发现" (**discover**)。词根是 dis- (去掉) 加 cover (覆盖) ——把盖子揭掉。这个构词法本身就编码了一整套本体论：那个东西在盖子底下，一直在那里，我做的只是揭盖。同族的希腊词 aletheia (真理) 在词源上是"不被遮蔽"，也是同一个形状。中文的"发现"同理：现，是显现；发，是使之显现。

"发明" (**invent**)。词根是 in- (进入) 加 venire (来) ——拉丁文 invenire 的本义是"来到"、"碰上"、"找到"。这一点常被忽略：**invent** 原本不是"造出来"，是"找到"。罗马修辞学里的 inventio 指的是"找到论点"，找的是那些已经在那里的题材。它转向"创造"义，是文艺复兴之后的事。

于是这场争论的两个词，在词源上说的是同一件事——都是"找到"。"造"这层意思是后来才被安进 invent 里的，而 discover 至今没有这层意思。

这不是文字游戏，它有一个实在的后果：发生派从一开始就没有一个现成的词可用。他们要说的那件事，必须借用一个原义是"找到"的词，或者另造一个（维柯的 factum、布劳威尔的"构造"、皮亚杰的"建构"）。而借来的词自带原义的重力。

第三个词更要紧："教"（**teach**）。词根与 token（记号）同源，本义是"指出、显示"。拉丁文的 docere（教）与 doctrine（学说）、document（文件）同源，本义是"使人看见、使人接受"。中文的"授"是给予，"传道"是传递。

这三个词合起来是一整套语法：那个东西在那里（discover），我碰上了它（invent 的原义），然后我把它指给你看（teach）。三个词里没有一个含有"在你那里重新长一次"的意思。

编三整编说的是这道工序落在排版上、落在制度上；本节补一句：它还落在词里。而词是最难改的一层——一个教师即使完全接受本书的判断，他明天走进教室时，脑子里那个动作仍然叫"教"，而"教"的意思是指给你看。

十、一处对本书不利的读法

一条方法论上的反读，而且它对本书这一章尤其有力。

反读是："回溯性本体化"这个名字，本身就是一次回溯性本体化。

具体地说：本书从编一那六位各不相同的操作里，抽出一个共同的动作，给它命名，然后把它当作解释那六次操作的东西。可是那个共同动作是本书从产物里抽出来的——柏拉图没有执行过"回溯性本体化"，他只是提出了理念论。本书把自己的归纳成果，回过头当成了那六个人身上运行的机制。这正是本书指控他们的那件事。

这个反读是对的，而且本书接受它的全部力量。三条回应，前两条是限定，第三条是让步。

第一条限定：本书从未主张那六位"执行"了这个动作。本章第一节的措辞是"共同动作"，指的是六次操作在结构上同形，不是六个人心里有一个共同的意图。同形是可核对的（六个户头的表就在那里），意图不可核对，本书不作那个主张。

第二条限定：一个概念是归纳出来的，不等于它是被本体化了的。区别在编四第二十二章第五节那条：回溯性本体化的病灶不在"从产物抽出概念"，在"抽出之后把它摆为起点、并抹掉抽的那一段"。本书没有抹——第十三章第一节到第三节完整写出了这个概念是从哪六个案例、按什么形状抽出来的；本章第九节还补了词源。抽的过程是公开的，这正是它与被本体化的概念的差别。

第三条，让步：这个免疫是脆弱的，而且它有一个具体的失效方式。如果本书成功，"光滑化""封写""回溯性本体化"这些词会开始被单独使用——被写进课程标准、被印在教研手册上、被当作现成的诊断标签。那时它们就是被本体化了的：一个教师会说"这个班被封写了"，就像说"这个学生是视觉型学习者"一样，而不再问它从哪来、在什么条件下不成立。

编三第十六章已经写过本书对此的唯一防御（把失败条件做成不可分割的），这里只补一句更硬的：

本书的每一个新词，都必须在它第一次出现的那一节里带着它的失败条件；凡是被单独引用而不带失败条件的，就是这个词已经被本体化了的信号。

读者可以用这一条来判断任何一份引用本书的材料，包括本书自己后来的章节。

十一、本章与作者一篇前身文章的关系

必须交代一处出处，否则本章会显得是凭空而来。

本章第四、五、六节的三重诊断，取自作者 2026 年 1 月的一篇纲领性短文《SDE：对“发现”的发生学彻底革命》。那篇文章提出了三条本书完整继承的判断：稳定特征崇拜导致的回溯性本体化、中段机制的系统性降格、结构语言在教学与传播中的独占；并给出了“生成问题被外包给运气、创新机制交给天赋、结构更新交给偶然”这一句，以及“能否回答特征如何诞生”这个判准。

那篇文章与本书的分工，须写清三条。

其一，那篇是纲领，本书是争论重审。那篇提出应当把知识对象从稳定成果转回稳定化过程，但没有处理“这场争论本身为何两千五百年不决”这个问题；本书编一编二编五整整三编在做的，就是这件事。

其二，那篇的诊断止于上游——把稳定当起点是错的。本书编四要走的是下游：把稳定当起点这件事，在接收者身上造成了什么。这一步那篇没有，任何一位在编一编二被指认的先行者也都没有。本书唯一要求被独立评判的东西在那里。

其三，那篇为知识生产者写，本书为知识接收者写。那篇给出的六步操作闭环（目标特征锁定→结构扫描→差异建模→纠缠诊断→中心位判定→复写验证）是一套研究与创新的组织工艺，与本书编六那套教学工序处理的是不同的问题：前者管“怎么造出一个新东西”，后者管“一个已经造好的东西怎么在一个新的人那里重新长出来”。两者不可互相替代，也不该混用。本书附录三收录了那套生产端工艺作为对照，并在那里注明了它不属于本书的论证链。

另有一处术语上的更正须写在明处。那篇文章中 S 被称作“结构态”，本书全书称之为显露。这不是措辞偏好：叫它结构，会把“它是被压出来的一个暂时中心”这层意思重新丢掉——结构这个词本身就带着地基的语感，而那正是本书要拆的那个语感。本书此后不再使用结构态一词指称 S。

第十四章 二十个数学对象的来路

判断卡片：本章不是数学史普及，它是一份证据清单。九个对象，逐一给出逼出它的那个具体困境、走通它的那条具体路径、以及今天课本上留下的那一句话；九次对照的结论是同一个——课本里越是简短、越是不容置疑的一句定义，背后埋着的困境往往越长、越丑、越被人抗拒。光滑的程度与被磨掉的路径的长度成正比。

一、清单怎么读

前一章给了工序，本章给材料。九个对象都是小学到大学一年级会遇到的，不是冷僻例子；每一个都有可查的年代、可查的人名、可查的争论记录。

每一条按四栏读：困境（什么走不通）→ 路径（怎么走通的）→ 课本上剩下的那一句 → 被磨掉的是什么。

二、九条

一、无理数。困境：正方形的对角线与它的边，找不到一个公共的度量单位——不管把单位取多小，都量不尽。这在一个把“万物皆数（可用整数之比表示）”当作信条的学派里，是塌天的事。路径：欧多克索斯放弃了“用数去表示它”，改为用比例关系去刻画它——两个量的比相等，定义为对任意整数倍数的比较结果一致；两千两百年后，戴德金用有理数集的一次分割给出了它。课本上剩下的一句：不能表示为两个整数之比的数叫无理数。被磨掉的：一次信念崩塌，和一次“绕开表示、改用比较”的战略退却。

二、负数。困境：不够减。三减五要一个答案，账上欠了钱要一个记法。路径：中国的《九章算术》里很早就有正负相消的算法，印度的婆罗摩笈多在七世纪给出了完整的运算规则并用债务来解释；而欧洲抗拒了很久——十六世纪它还被称作“虚构的数”，十七世纪还有第一流的头脑认为零减四是没有意义的，十九世纪仍有数学家撰文反对。真正让它安顿下来的是一个几何解释：数轴上原点的另一侧。课本上剩下的一句：负数表示相反意义的量。被磨掉的：一段长达数百年的、有人写文章反对的接纳史。

三、虚数。困境：三次方程有一个公式，而当三个根都是实数的时候，那个公式偏偏要求你在中途穿过一个负数的平方根。你不穿过去就到不了三个实根；穿过去的那一步在当时没有任何意义。路径：邦贝利在一五七二年做了一件很勇敢的事——他不问那个东西是什么，先规定它怎么算，然后发现算到最后它自己消掉了，剩下的正是三个实根。两百多年后，复平面给了它一个位置。课本上剩下的一句： i 的平方等于负一。被磨掉的：一个“明知道不可能但非穿不可”的中间步骤，和“先规定运算、后追问意义”这条极重要的策略。顺带记一笔：**imaginary** 这个名字是笛卡尔起的贬称，它至今还挂在那里，是数学史上最长寿的一块伤疤。

四、极限。困境：微积分要用一个量，它在做除法的时候不是零，在最后一步又必须是零。贝克莱主教在一七三四年那句著名的诘难说得比任何数学家都狠：这些消失了的量的鬼魂，究竟是什么？路径：柯西把“无限接近”改写成“要多近有多近”，魏尔斯特拉斯把它彻底改成一场比赛两个人的博弈——你给我任意小的容差，我给得出对应的范围。课本上剩下的一句：对任意 ε 大于零，存在 δ 大于零，使得……被磨掉的：一个多世纪的逻辑危机，以及把“接近”这个动态的词改造成一句静态的、只含量词的话这一步智力上的巨大转弯。学生觉得 ε - δ 抽象、突兀、不知从何而来，正因为它是那场漫长搏斗被彻底磨光之后的残留。

五、微积分。困境：三件旧办法办不到的事同时到来——求任意曲线在一点的切线、求任意曲线围出的面积、求变速运动在某一瞬的速度。路径：牛顿从运动出发（流数），莱布尼茨从差分出发（微分），两条路各自走通，然后发现求切线与求面积互为逆运算。课本上剩下的：一套求导法则和一张积分表。被磨掉的：那两条路各自的动机，以及“互逆”这件事在当时的震撼——今天它被称作基本定理，一个学生背下这个名字，往往从不知道它基本在哪里。

六、非欧几何。困境：第五公设看起来不像公设，像一条应该能被证出来的定理，而两千年里没有人证得出。路径：一位十八世纪的耶稣会士试图用归谬法证明它——假设它不成立，往下推，指望推出矛盾。他推出了一大堆极其古怪但没有矛盾的结论，然后宣布这些结论“违反直线的本性”，收工。他离终点只差一句话，而那句话是“没有矛盾就是没有矛盾”。半个世纪后，罗巴切夫斯基与鲍耶把那句话说了出来。课本上剩下的：一句“还存在别的几何”。被磨掉的：两千年的失败，以及一次差一点点就成功的失败——而后者比前者更有教学价值。

七、群。困境：二次、三次、四次方程都有根式解公式，五次的没有人找得到。这不是找得不够勤——问题是根本上有没有。路径：拉格朗日发现关键不在方程本身，在根的置换；阿贝尔证明了一般五次方程没有根式解；伽罗瓦在二十岁死于决斗前的几年里，把“哪些方程可以根式求解”这个问题，翻译成了“某个置换的集合有没有某种特定的结构”。群这个概念是被这个问题逼出来的一件工具，不是先有群再拿它去用。课本上剩下的：群是一个集合配一个满足四条公理的运算。被磨掉的：那个逼出它的问题，以及“把一个关于方程的问题翻译成关于对称的问题”这次转译——而那次转译才是全部的智力所在。

八、集合（作为一个数学对象）。困境：一个函数用三角级数表示，这种表示唯一吗？康托尔在处理这个问题时发现，答案取决于允许有多少个例外点、这些例外点排列成什么样子。于是他被迫去研究“点的集合”本身，并且被迫一层层地做导集，一直做到有穷次不够用，只好接着往下编号——超限序数就是这么被逼出来的。课本上剩下的：集合是……被磨掉的：它原本是一个关于三角级数的技术问题的副产品。而它在教学上被当成了整座数学大厦的第一块砖——这正是第十九章要说的那件事的原型。

九、概率。困境：一场赌局中途被打断，赌注怎么分才公平。这是一个具体的、有人在为它吵架的纠纷，帕斯卡与费马在一六五四年为它通了几封信。路径：他们的关键一步不是算已经发生的，而是算如果打完会怎样——把还没有发生的所有可能路径都摆出来，按它们的份额分。课本上剩下的：概率是……被磨掉的：一场赌钱的争执，以及“用没有发生的事去分配已经发生的钱”这个在当时相当古怪的想法。

三、逐条细看两条：一条抗拒最烈的，一条从无人反对的

上一节是清单，本节挑两条展开，因为它们是那条“两类困境”区分的两个极端标本。

其一：负数——抗拒最激烈的一条。

这一条的材料特别好，因为它的抗拒有大量白纸黑字的记录，横跨几个文明，而且反对者不是庸人。

中国很早就有正负数的运算。《九章算术》“方程”章里有“正负术”，给出了同名相除、异名相益这类完整规则，用赤黑两色算筹区分。请注意这里的形状：负数是在解方程组的过程中作为一个中间量出现的——你在消元时会遇到“不够减”，于是需要一个记法把它记下来，等它在后面被抵消掉。它是被一条工序逼出来的，而不是被当作一种“数”提出来的。

印度在七世纪走得更远：婆罗摩笈多不只给出运算规则，还给了一个解释——财产与债务。正数是财产，负数是债务，两个债务相乘为什么是财产，他有一套说法。这是数学史上第一次为负数配上一个可以想象的土壤。

欧洲抗拒得最久，也最有意思。十六世纪的著作里，负根被称作“虚假的根”；十七世纪还有第一流的头脑认为“零减四”是没有意义的，因为没有什么东西能比“什么也没有”更少；十八、十九世纪仍有数学家撰文反对，其中一位的论证是：若负数存在，那么 $-1:1 = 1:-1$ ，即较小者与较大者之比，等于较大者与较小者之比，这荒谬。

这个反对是有道理的，而且它指出了真问题。它反对的不是负数这个记号，是把负数纳入“数”这个类之后，“大小”“比例”这些旧概念必须跟着改。而那正是本书说的改写：接住负数，你必须改动“什么叫大”这件事。

欧洲之所以抗拒得最久，恰恰因为它对“什么叫一个数”有最完整的旧理解，而那个理解被负数直接顶撞。中国那边负数是工序中的中间量，不触碰本体；印度那边有债务这个土壤托着。抗拒的强度，与旧理解的完整程度成正比。

这一条给出一个可迁移的判断：在一个概念上抗拒得最厉害的地方，往往正是它要求的改写最深的地方。而课本上剩下的那一句“负数表示相反意义的量”，恰好把这次改写整个抹掉了——它把一次本体上的顶撞，写成了一句关于用途的说明。

其二：九九表——从来没有人反对过的一条。

与之相对，人类学会乘法口诀这件事，历史上没有留下任何抗拒的记录。它在各文明里被独立发明、被广泛使用、被儿童背诵，从无争议。

为什么？因为它不要求改写任何东西。乘法是重复相加的打包——你原来有的加法一条不用改，只是多了一个省力的办法。它属于“贵”那一类：旧办法做得出来（真的加四十遍），只是代价不可接受。

于是本节这两条给出了那条区分的最硬的一个旁证：两类困境连引起的历史反应都不一样。

	「贵」类	「没有」类
旧办法	做得出来，代价不可接受	根本给不出对象
要求的改写	无（旧理解一条不用动）	有（旧理解必须让位）
历史反应	无人反对	长期、激烈、有署名的抗拒
例	乘法、位值、简便运算	负数、虚数、无理数、非欧
课堂摆法	让他累	让他卡住

这张表的第三行是它最值钱的一行，因为它是可核对的：任何一个数学对象，去查它有没有留下抗拒的记录，就能反推它属于哪一类。而一个属于“没有”类却从未在你的学生那里引起任何别扭的概念，多半是被光滑化处理过了。

四、九条合起来说明了什么

三件事。

第一，这九条的困境形状不同，可以分成两类，而这两类在教学上后果完全不同。

一类是贵：旧办法做得出来，但代价不可接受。重复相加求“五个三”做得出来，只是慢；位值制之前用符号写大数做得出来，只是写不下。

另一类是没有：旧办法根本给不出对象，或者根本启动不了。整数里根本没有“三饼分四人”的那个答案；有理数里根本没有对角线的那个长度；实数里根本没有负一的平方根。

九条里，乘法与位值属前一类；无理数、负数、虚数、分数属后一类；极限、非欧、群、集合、概率是复合的。这两类的区别不是学究气的分类，它决定了课堂上那个缺口要怎么摆——“贵”的缺口要让学生累，“没有”的缺口要让学生卡住。累和卡住是两种不同的体验，用错了，缺口就摆不成。第三十章会用这条区分来编课。

第二，凡是抗拒最激烈的，都属于“没有”那一类。负数、虚数、无理数、非欧，历史上都被称作荒谬的、虚构的、不可能的、违反本性的。而九九表从来没有人反对过。两类连引起的反应都不一样——这是一条可以拿去核对任何一个新对象的旁证。

第三，也是本章的落点：光滑的程度与被磨掉的路径的长度成正比。

课本里越是简短、越是不容置疑的一句定义，背后往往埋着越长、越丑、越被人抗拒的一段过程。“负数表示相反意义的量”这十一个字，压着数百年的拒绝； i 的平方等于负一——这七个字，压着一个“明知不可能但非穿不可”的两百年。

这一条有一个直接的教学推论，而且它与直觉相反：

一个概念在课本上被写得越干净利落、越不容置疑，它在课堂上就越危险。

因为那份干净利落，恰恰是一份“这里没有什么可问的”的信号，而这个信号会被接收者原样收下——第四编要论证，收下的不是这个概念，是一条关于所有概念的规则。

五、一处对本书不利的读法

一条来自数学史专业方向的反读，而且它相当严厉。

反读是：本章那份清单是辉格式的历史。

所谓辉格式，指的是站在今天回头看，把历史整理成一条通向现状的直线，凡是通向现状的都被记为“进展”，凡是别的都被略去。本章那二十条正是这个做法：每一条都是“困境—路径—今天的定义”，而真实的历史里，绝大多数尝试没有通向今天的任何东西。

具体的指控有三条，都成立：

其一，清单里的“路径”是被挑出来的。负数在欧洲被接纳的过程中，有大量今天看来毫无价值的辩护与折中；本书只留了那条通向数轴的。

其二，“困境”常常是事后归因的。康托尔研究三角级数表示唯一性时，未必觉得自己在被一个“困境”逼着做集合论；那个因果链条是后人梳理出来的。

其三，人名与年代的干净是假象。“邦贝利在一五七二年做了一件很勇敢的事”这样的写法，把一段模糊的、多人参与的、往复反复的过程压成了一个瞬间。

本书接受这三条，并且必须说明它为什么仍然这样写。

理由是这份清单的用途：它不是一份历史研究，是一份备课底表（附录二）。教师需要的不是那个概念的完整史，是一个可以摆到课堂上的困境，而那个困境必须是干净的、可以在五分钟内讲清楚的、能让学生真的卡住的。

于是本书做一次明确的自我限定，写在这里而不是藏在脚注里：

本章那份清单是一份教学用的重构，不是一份史学结论。凡与专业数学史研究冲突之处，以后者为准。

而这个限定有一个代价，本书也接受：它意味着本章不能被用作任何史学论证的依据，包括不能被用来支持本书自己关于“抗拒强度与改写深度成正比”那条判断——那条判断本节写成了一个可核对的建议（去查有没有抗拒记录），而不是一条已被证成的规律。

顺带说，这个自我限定本身也是编三第十七章那条挡板的一个应用：一份适合搬运与教学的形态，与一份适合核查的形态，本来就不是同一份。本章是前者，专业史学著作是后者，两者不该互相冒充。

第十五章 文本的次序：定义为什么在第一页

判断卡片：光滑化最后落地的地方不是任何人的观念，是排版。“先定义、后分类、再归纳”这个次序，把发生链的终点摆在了第一段，把中段降为末尾的补丁；而这个次序不是任何人决定的，它是一种格式，格式不需要信徒。判断一段呈现有没有执行这道工序，不必读它的立场，只需数一件事：那个概念是为解决什么而出现的——这句话出现在第几段。

一、把判断落到一件可以数的事上

前两章一个给了工序，一个给了材料。本章要把它们合起来落到一个任何人当场可以核对的地方。

拉图尔与伍尔加在第十二章给了一个便宜的指标：数一个陈述周围挂着的限定词是在增加还是在减少。本章给数学与数学教育一个同族的指标：

数“这个概念是为解决什么而出现的”这句话，出现在第几段。

去翻任何一本教材的任何一章。绝大多数情况下，答案是三种之一：它不出现；它出现在末尾的“背景”“拓展”“数学史小知识”里；它出现在开头，但是以一句装饰性的话出现——“分数在生活中有广泛的应用”，这句话不是困境，它是一句广告。

这个指标的好处是它不问立场。一本自称建构主义的教材，若它的每一章仍然从定义开始，它在这个指标下与最传统的教材没有区别。

二、那个次序的三段，各自在做什么

通行的呈现次序是三段：先定义与分类，再结论与模型，最后附加机制讨论与背景说明。

请注意这三段各自的功能，以及它们的次序造成了什么。

第一段（定义与分类）是发生链的终点。第十一章那份档案已经证明，“多面体”这个定义是与反例搏斗了两百年才勉强稳定下来的产物；把它放在第一段，就是把两百年搏斗的结算单摆在开场。

第二段（结论与模型）是终点的推论。它建立在第一段之上，因此它的严密性完全依赖第一段的稳定性——而第一段的稳定性从哪来，这一段不问。

第三段（机制与背景）是被降格的中段。

第三段的位置是全章的要害。同样的内容，放在第一段和放在第三段，功能完全不同：

机制讨论放在结论之前，是发动；放在结论之后，是说明。

背景放在概念之前，是它出现的理由；放在概念之后，是一条注释。

一件东西是发动机还是说明书，不由它的内容决定，由它在文本里的位置决定。而通行格式把它一律放在后面。

三、这个次序塑造了什么

位置安排会逐步塑造一整套认知习惯，而且这套习惯在教师与学生两侧同时形成：

先要结果，后补解释；先要结构，后谈发生；先要可用，后问何以可用。

后果不是“解释不重要”，而是解释被迫以补丁的形式存在。补丁式解释在成熟领域运转得不错，因为稳定结构已经长期固化，补丁足以应付渐进扩展。它在两种情形下立刻失

效：面对复杂的、跨域的新问题时（研究一侧），以及面对一个还没有这个对象的人时（教学一侧）。两侧失效的原因相同：决定成败的恰恰是被放到最后的那一段。

在学生一侧，这套习惯有一个非常具体、每位教师都听过的外显形式。当一堂课试图从困境讲起时，班上总有几个成绩很好的学生会礼貌地等一会儿，然后问：

“老师，你直接讲结论吧。”

这句话不是不耐烦。它是一份精确的报告：在这个学生的理解里，一个数学对象没有来路这回事，把时间花在“它怎么来的”上是浪费。他要的是那个可以被记住、被使用、被考的成品——而这正是他十年来每一本教材的排版教给他的。

第四编会论证，这句话是本书全部工作的入口。

四、第三重代价：结构语言的独占

第十三章列了三重代价，前两重已在前节展开，第三重要在这里正式处理，因为它落在语言上，而语言正是文本的材料。

发现学的语言是结构语言：以名词化、范畴化、层级化为主，以“是什么”为轴心，擅长定义、分类、规则与框架。它的优势是清晰，而且这个优势是真的——没有它，公共协作不可能，一本教材也写不出来。

问题在独占。当结构语言成为唯一的语言时，会出现一种很难被指认的贫血：句子可以非常精确，却缺少推进；术语可以非常齐整，却缺少张力；逻辑可以非常严密，却缺少生成。

这种贫血在教学上有三个可观察的表现：

- 学习被等同于“记住定义并学会归类”；
- 理解被等同于“能够复述结构并套用规则”；
- 掌握被等同于“能够在结构框架中填入例子”。

三条都成立时，知识确实可以被大规模复制。问题在于，被复制的是一具名词化的骨架。一个概念的推进（它是被什么逼出来的、在哪一步卡住、怎么转过来的）与它的牵连（它一旦成立，别的哪些东西必须跟着改）——这两样在纯结构语言里没有句法可以承载。说不出来，不是因为说的人笨，是因为那套语言里没有那个位置。

这里必须做一处收窄，因为原初的表述极容易走得太远。这不是主张结构语言有害，更不是主张要用更“生动”的语言去教数学。后者是一个常见且有害的误读，它会把数学课上成故事课，而故事课并不产生任何改写——第三十一章会论证，讲一段动人的数学史与摆一个真实的困境，是两件不同的事，前者常常只是换了一种更好听的成品。

本书的主张很窄：

结构语言应当回到它应有的位置——它是成果，是暂时的中心，是沉淀物；它必须能被推进与牵连持续改写，否则它就从成果退化为枷锁。

而判据仍然是位置的，不是风格的：定义在第几段。

五、一处必须承认的地方：这个次序是为「查」优化的

诚实起见，记一条对本章不利的证据。

这个次序有一个极强的实际理由：查阅。

一本教材不只是用来学的，也是用来查的。一个已经学过分数的人回头翻这一章，他要的正是那一句干净的定义，摆在最显眼的位置；把它埋在三页的困境叙述之后，对他是

一种折磨。同理，一篇论文的读者绝大多数不是来学的，是来查这篇文章做了什么的——摘要、定义、结论前置，是对读者时间的尊重。

于是本书必须承认：通行次序不是一个愚蠢的安排，它是为“查”优化的安排。而它的问题在于，为“查”优化的次序被当成了为“学”优化的次序，而且这个替换从未被人决定过。

这一条与第二章那个判断完全同构：欧几里得做的是存储与核查的工作，而产物被后世当成了教学的次序。第十八章要正式处理的，就是这一处分岔：存储形态与习得形态，什么时候可以合用一份，什么时候不能。

六、一处可核对的证据：四本教材的第一章

第一节给了一个指标：数“这个概念是为解决什么而出现的”这句话出现在第几段。本节把它实际用一遍，用在四类不同的文本上。

其一，一本小学数学教材的“分数的初步认识”。通行的开头是一幅情境图（分月饼、分蛋糕），然后一句“把一个物体平均分成若干份，其中的一份就是它的几分之一”。

请注意那幅情境图的功能：它是插图，不是困境。图上的两个孩子是分月饼，而月饼已经被画成了两半，答案就在图里。没有任何一步要求学生先用整数去够、够不着、卡在那里。按第一节那个指标，这一章的答案是：困境不出现；出现的是困境的插图。

其二，一本大学数学分析教材的“极限”一章。开头通常是数列的定义，然后是极限的 ε - N 定义，然后是唯一性、有界性、四则运算。贝克莱那句诘难、柯西那次改写、无穷小那一百多年的争论——若出现，出现在章末的“注记”或“数学史简介”里，用小字排。

其三，一篇数学论文。结构是摘要、引言、定义与记号、主要结果、证明、参考文献。“我们为什么需要这个定义”这句话若出现，在引言里；而引言的写法本身有一套惯例——它交代的是这个问题在文献中的位置，不是作者当初为什么会想到这样定义。真正的来路（试了几种定义、哪几种崩了、为什么最后选了这一个）从不出现在任何位置。

其四，作为对照，一本商用算书或应用手册。这一类的开头往往是一个具体问题：某商人有若干货物，如何分账；某工程需要多少材料。定义（如果有）出现在问题之后。

四类文本，前三类的答案一致，第四类不同。而第四类恰恰是编二第二章那条反读所指出的：不受“什么算一本正规数学书”这个标准约束的地方，光滑化更弱。

这不是四个统计样本，本节也不假装它是。它是一份任何读者可以自己重做的核对：拿起你手边任何一本数学教材，翻到任何一章，数一数那句话在第几段。本书的判断如果错了，这个核对会立刻显出来。

七、一处对本书不利的读法

一条从出版与写作实务出发的反读，而且它比第五节那条“为查阅优化”更硬。

反读是：“定义在第几段”这个指标测的不是知识观，是篇幅约束。

一本小学教材每一课只有两页，一学期要覆盖法定的全部课程内容；一本教材若给每个概念都配三页的困境铺陈，它会厚三倍，装不进书包，也上不完。教材编者不是不知道来路，是没有位置写。同样，一篇论文的篇幅由期刊定，一本大学教材的厚度由一学期的课时定。

于是本书那个指标测到的，可能只是“每一页要装多少内容”这个纯粹的工程约束，与任何本体论无关。

本书接受这个反读的大部分，并做两处回应。

第一处回应：这条反读恰好解释了为什么这道工序不需要任何人同意。它与编一第二章那条判断完全一致——光滑化的每一次制度化不是由某个人决定的，是由某个成功决定的。篇幅约束正是这类“没有人决定”的力量之一。一位完全同意本书的教材编者，在两页的篇幅里仍然只能写定义。这不削弱本书的诊断，它指出了这道工序的又一个动力源。

第二处回应，也是可以被检验的一处：篇幅约束预测的是“来路被压缩”，本书的机制预测的是“来路被移到末尾或删除”。这两者不同。

若纯粹是篇幅问题，那么在篇幅不受限的场合，来路应当回来。可以核对的场合有几个：教师用书（篇幅宽裕得多）、教学参考资料、大部头的多卷本教材、面向教师的教法专著。

按篇幅解释，这些地方应当有大量“这个概念是为解决什么而出现的”；按本书的机制，它们仍然主要是“怎么讲清楚这个定义、学生会犯哪些错、如何纠正”。

这个核对本书没有系统做过，只做过零星翻阅，印象偏向后者，但印象不算证据。本节把它列为一条尚未执行的核对，并写明它的判决效力：

若在篇幅不受限的教师用书中，“这个概念是为解决什么而出现的”普遍出现在靠前的位置，则本章那个指标测的是篇幅，不是知识观，第一节须撤回。

这是编三唯一一条可以由读者独立执行、且能推翻本章的核对。

八、一个立刻可用的动作

本章最后给一个不需要任何理论准备、任何教师明天就可以做的动作，它也是本书对“可核对”这条要求的一次兑现。

拿出你要教的下一章，做三件事：

其一，找出那句困境。问：“如果没有这个概念，哪一件事做不成或者贵得不能接受？”（第十四章那两类的区分在这里用得上：是“贵”还是“没有”。）如果找不到这句话，说明你自己也没有这个概念的来路，而一位不知道来路的教师，无法带学生去走那条路。

其二，看它现在在第几段。通常是不在，或者在最后。

其三，把它挪到第一段，把定义挪到它该在的位置——结算点，而不是起点。

这三步不需要改动任何一条数学内容，不需要新教材，不需要额外课时。它只是把同一批东西换了个次序。而第四编将论证，正是这个次序，决定了接收者身上被写下的是这个概念，还是一条关于所有概念的规则。

第十六章 三份自供：发现的次序与呈现的次序

判断卡片：三位第一流的数学家在二十世纪前半叶各写了一本书，公开交代发现的次序与呈现的次序完全不同，而且交代得比任何哲学家都具体。这三本书后来被读成解题技巧手册，它们的本体论含义被剥掉了。一份关于光滑化的自供，本身被光滑化——这是本书能找到的、这道工序最讽刺也最有力的一次自我演示。

一、三份材料

前面各章的证据，来自旁观者：哲学家的论证、历史学家的档案、人类学家的田野。本章的证据来自当事人。

三位，三本书，都在二十世纪前半叶：

庞加莱，一九〇八年那篇关于数学创造的演讲。他讲了自己发现富克斯函数的经过：连着十五天坐在桌前尝试一类他后来证明不存在的函数；某天喝了黑咖啡睡不着，各种想法在脑子里成群地撞，到早上他确定了一类函数的存在，只需要把结果写出来。然后是那个被引用了一百年的场景——他去别处旅行，登上一辆公共马车，脚踏上踏板的那一瞬间，那个想法来了：他用来定义富克斯函数的变换，与非欧几何的变换是同一回事。他上了车，继续跟人谈话，心里已经完全确定；回来之后从容验证，一次没错。

阿达马，一九四五年的《数学领域中的发明心理学》。他做了一件当时没人做的事：向同时代的数学家发问卷，问他们发现的时候脑子里在发生什么。回信里最著名的一封来自爱因斯坦，说得很干脆：在他的思维机制里，语词或语言似乎完全不起作用，起作用的是一些可以自愿再生和组合的符号与形象，语词要到第二阶段才被吃力地找出来。

波利亚，一九四五年的《怎样解题》以及后来那两卷《数学与似真推理》。他把话说得最直白，而且这句话应当被完整引用它的意思：已经完成的数学看起来是一门纯粹的演绎科学，而正在形成中的数学，是一门实验性的、归纳的科学。

二、三份自供说的是同一件事

三位处境不同、性格不同、写作目的不同，但他们交代的是同一件事，而且这件事正是本书第十三章那道工序：

数学被做出来的次序，与数学被写下来的次序，完全不同；而写下来的那个次序，把做出来的那个次序整个抹掉了。

庞加莱交代的是：真正起作用的那一段（十五天的失败、夜里的碰撞、踏板上的那一瞬）在论文里一个字也不会有；论文里只有从容验证之后的那个结果。

阿达马交代的是：数学思维在关键阶段甚至不是语言的；而论文只能是语言的。能被写下来的部分，从一开始就不是全部。

波利亚交代的是：一门学科有两副面孔，而教科书只呈现其中一副，并把那一副当成了它的全部。

请注意这三份材料的性质。它们不是哲学家对数学的推测，是数学家关于自己工作的第一人称报告；而且三份互相独立，说的是同一件事。第一编那六位没有一位处理过这类材料——当事人的自供，在那场争论里从未被当作证据。

三、然后发生了一件事

这三本书都很成功。《怎样解题》卖了上百万册，被译成十几种语言，至今仍在印。而它们被读成了什么？

《怎样解题》被读成一本解题技巧手册：四个步骤（弄清问题、拟定计划、执行计划、回顾），加一张启发性问句表（有没有相关的问题？能不能改述？先解一个更特殊的？）。

这些内容确实在书里，而且极有用。

但波利亚写那本书的理由，是上一节引的那句话——数学有两副面孔，教科书只给了一副。他要做的不是提供技巧，是把被抹掉的那一副面孔还回去。而在绝大多数教师培训、教辅材料、课程标准的引用里，那句话不在了，只剩下四个步骤和那张问句表。

庞加莱那篇演讲同样如此：被引用最多的是踏板上那一瞬，被当作“灵感”的著名轶事，而他那篇演讲真正的论点——无意识工作有它自己的选择标准，而那个标准是审美的——很少被接着讨论。阿达马那本书则基本上只作为爱因斯坦那封信的出处而存在。

于是本章的落点可以写出来了：

三份关于光滑化的自供，本身被光滑化了。

被磨掉的正是那两样：土壤（他们为什么要写这些——因为通行的呈现方式抹掉了真实的过程）与路径（他们各自是怎么得出这个判断的——庞加莱靠自省，阿达马靠问卷，波利亚靠几十年的教学观察）。剩下的是一个可以被打包递送的光滑成品：四个步骤，一张表。

这是本书能找到的、这道工序最讽刺也最有力的一次自我演示。它证明了这道工序不挑内容：连一份控诉这道工序的文本，在被大规模传递时，也会被这道工序处理一遍。

四、这一条对本书自己的约束

上一节那个结论，对本书是一把双刃的刀，必须当场接住。

如果连波利亚都逃不掉，本书凭什么逃得掉？本书如果成功，它最可能的结局，就是被抽掉土壤与路径，压成一张可以打印出来贴在办公室墙上的表：三步还原、五步环、解锁三问。

本书对此没有免疫办法，只有两条部分的防御，都写在明处：

第一条，把最容易被抽掉的那一段做成不可分割的。本书全部工序都带着它的失败条件——第三十三章那三个预注册实验、每一编末尾的可推翻条件、第三十四章那条自我反问。一张贴在墙上的表不会带上这些，所以一旦看到有人在用本书的工序而说不出它在什么情况下无效，那份东西已经不是本书了。这不是抱怨，这是一条可供读者当场使用的识别码。

第二条，也是更要紧的一条：承认这不是缺陷，是这道工序的普遍性再一次成立。如果本书是对的，那么本书被光滑化就是本书的预言之一。一个预言了自己会被如何误用的理论，不能因为那个误用发生了而被判为错。但它也不能因此免责——第三十四章会正面处理这个自反的困难，包括那个最不利的反问：若“先在感是被造出来的”这一判断本身也是被某种传递史造出来的，本书凭什么例外。

五、一处不能滑过去的地方

有一个诱人的推论必须挡住。

从“发现的次序不是呈现的次序”，很容易推出“那就按发现的次序来教”。这一步不成立，而且它是新数学之外教育史上另一次代价不小的错误——把学科的历史发展次序当作个体学习的次序，通常被称作复演说。

本书明确不主张复演说，理由在第三十章会完整给出，这里先给一句：庞加莱那十五天的失败，对庞加莱是必要的，对一个学生不是。一个学生要走的不是历史的那条路，是

他自己走得通的那条粗糙的路——这两条路的困境可以是同一个（“整数不够分”两千年前和今天是同一个困境），但路径的落脚点必须按他现有的底盘来铺。

土壤常常可以原样还给学生，路径几乎总要重铺。这是本书对三份自供的正确使用方式，也是它与复演说的分界线。

六、一处可核对的证据：那本书里被删掉的一句

第三节说三份自供被读成了什么。本节给一处可以直接核对的痕迹。

《怎样解题》流传最广的形态，是那张“怎样解题表”——四个阶段加一串启发性问句，一页纸，被印在无数教辅材料的扉页上、贴在无数间办公室的墙上。

而那张表在原书里的位置是：正文之前的插页。原书正文四个部分——教室里、怎样解题、启发法小词典、问题·提示·解答——加起来两百多页，其中“启发法小词典”占了全书一半以上的篇幅，逐条讲每一个启发性动作的来历、变体、失效情形与例子。

被大规模复制的是那一页插页，被略去的是那两百页。

而两者的关系恰恰是本书的题目：那张表是那两百页的结算点，而它被单独抽出来，摆在了起点。

更值得核对的是那张表里“回顾”那一栏。原书里，第四阶段“回顾”的地位很高——波利亚反复说，回顾是最容易被略过、也最有价值的一步。而在流传的版本里，“回顾”通常被压成一句“检查答案是否正确”。

原书的“回顾”问的不是答案对不对，它问的是：这个结果或方法，能不能用到别的问题上？那不是检验，那是迁移，也就是本书说的改写。

于是这一处是一份很干净的证据：三份自供被压成一张表，而表上最接近“改写”的那一栏，被压得最厉害。它被从“能不能用到别处”改成了“算得对不对”——恰好落到编四第二十一章那第三款上（可用与理解脱钩）。

这条痕迹任何人都可以核对：找一份印着“怎样解题四步”的教辅材料，看它第四步写的是是什么。

七、一处对本书不利的读法

一条相当直接的反读，而且它指向本章的整个论证方式。

反读是：“被压成一张表”是一切成功的传播的常态，用它来支持一个关于光滑化的判断，是循环论证。

具体地说：任何一本被广泛使用的书都会被压缩——这是传播的经济学，不是什么本体论机制。牛顿的《原理》被压成三条定律，达尔文被压成“物竞天择”，凯恩斯被压成几条政策建议。本书举出波利亚被压成一张表，只是又举了一个“书被压缩”的例子，而不是举出了“光滑化”的证据。而本书之所以觉得它是证据，是因为本书已经假定了那个机制存在。

这个反读击中了一个真实的方法论问题，本书接受，并做一处收窄。

收窄是：“被压缩”确实是常态，本书不用它作证据。本书用作证据的是压缩的方向。

一次压缩要丢掉一些东西、留下一些东西，而丢掉哪些是可以核对的。本章第六节那处正是如此：留下的是四个步骤（可直接执行的操作），丢掉的是那两百页（每个动作的来历、变体、失效情形）；而第四步内部，留下的是“检查对不对”，丢掉的是“能不能用到别处”。

方向一致：留下可直接执行的，丢掉带来路的与要求迁移的。而这个方向不是"压缩"这件事本身所要求的——一份压缩完全可以反过来做，只留四句"这四个动作各自在什么情况下不管用"，那也是一页纸。

于是本书的判断收窄成一句可核对的：

本书不主张"被压缩"是光滑化的证据；本书主张的是，压缩系统性地朝一个方向丢东西——丢来路，留操作——而这个方向本身需要解释。

而这个收窄同时把它变成了可否证的：若能举出足够多被广泛传播的压缩版本，它们保留了来路而丢掉了操作，则这条判断被推翻。本书举不出这样的例子，但也没有系统找过。

八、这一章在全书里的位置

三位当事人的自供，把这道工序的存在从推论变成了报告。而这三本书自身的命运，把它的普遍性演示了一遍。

到这里，编三的诊断部分完成了：工序有三步（第十三章）、有九份材料（第十四章）、落在排版上（第十五章）、并且被当事人指认过（本章）。

接下来两章要转向一件很不一样的事——为这道工序辩护。因为如果本编到此为止，读者会得到一个错误的印象：这道工序是一件坏事，应当被取消。它不是，而且它不能被取消。下一章是全书最重要的一道挡板。

第十七章 光滑化是文明的必需——全书最重要的一道挡板

判断卡片：光滑化不是一个错误，它是人类知识得以积累的前提。若每一代人都必须从零把全部数学重新发生一遍，文明将寸步难行。本书不主张取消它，也不认为它可以被取消。全书的判断只落在—处极窄的地方：适合存储与传递的形态，未必适合习得；而这两个形态在历史上从未被分开处理过。

一、为什么这道挡板必须立在这里

编前三章连着四刀，读到这里的读者极可能已经形成一个印象：光滑化是一件坏事，是一次持续了两千五百年的集体失误，应当被纠正。

这个印象是错的，而且它比本书要反对的任何东西都危险。一旦读者带着它去改课，会立刻做出三件蠢事：取消定义、取消严格性、把每一节课都上成数学史。第十九章会给出这三件事在二十世纪已经被大规模试过一次的记录，以及它的后果。

所以这道挡板要立在编三的正中间，而不是放在末尾的“当然，我们并不是说……”里。按本书自己第十五章那条判据，一句放在最后的限定，就是一块补丁。

二、它扛着什么

先把光滑化承担的工作老老实实列出来。

其一，它使知识可以被完整搬运。一个定义写在纸上，可以从教师的板书抄到学生的笔记本上，一个字不差；可以被抄写、翻译、印刷，跨越语言与文明传下去，不损失任何东西。《几何原本》能传两千三百年，靠的正是它被磨得足够光滑——一件带着毛刺、带着人名、带着某年某月某地某场争论的东西，是搬不动的。

其二，它使知识可以被外部核查。第二章已经说过：一旦要求每一步都从明写的前提推出，那些“大家都觉得显然”的东西就必须被写下来。第五公设正是因为被写了下来，两千年后才有人能够去动它。没有被写出来的假设不可能被推翻。光滑化磨掉的是来路，但它同时逼出了前提——这两件事是同一个动作的两面。

其三，也是最要紧的一条：它使后人不必重走那条路。一个今天的中学生，用一个下午就能掌握当年花了两百年才磨出来的极限概念。这不是他比柯西聪明，是因为柯西那两百年的搏斗被压成了一句话交给了他。站在前人肩膀上，其物理形式就是站在被磨光的成品上。

把这三条合起来：如果没有光滑化，每一代人都必须从零把全部数学重新发生一遍，那么人类的数学知识将永远停留在一个人一生能够重新发现的量级上。那个量级，大约是古希腊。

光滑化是一项伟大的效率工程。这句话在本书里不是客套。

三、那么问题究竟在哪

问题只在一处，而且这一处必须说得极精确，否则整章白写：

适合存储与传递的形态，未必适合习得。

光滑成品是知识最适合被保存和搬运的样子，却是它最不适合被一个新学习者接住的样子。这两件事没有任何理由必须由同一种形态承担，而在历史上，它们从未被分开处理过——因为存储那一份先做好了，而且做得那么成功，以至于没有人再去问是否需要另做一份。

于是可以给出本书对整场争论的第二个判断（第一个在导论第三节）：

发现学的失误，不在于使用了光滑化的成品（那不可避免，也是必要的），而在于误以为“存储的形态”可以直接充当“习得的形态”，把档案馆里的东西原样搬进了课堂。

这是一次格式的僭越，不是一个观念的错误。它没有人决定，它是那个成功自动带来的一——第二章那条贯穿全书的判断在这里第三次出现：光滑化的每一次制度化，不是由某个人决定的，是由某个成功决定的。

四、一对真实的张力

由此得到一对张力，而且它是真实的、不可消解的，本书不打算调和它：

文明需要把知识磨光以便传下去，教育需要把它重新磨粗以便长进来。

这一对里没有谁对谁错。磨光的一侧承担积累，磨粗的一侧承担习得；两侧都是必需的，而且两侧的要求方向相反。

发生学教学法要做的，不是取消磨光，是在该磨粗的地方把它磨粗。而“该磨粗的地方”不是任意的——第十一编第三章会给出边界：当学习者的相关底盘已经厚实、当某个显露已经作为常识地基沉稳、当情境要求快速传递而非深层重构时，直接端出光滑的成品不仅无害，而且高效。发生学不主张对每一个概念、每一节课都实施还原。

它主张的只有一条，而这一条很窄：对那些学生反复犯同一个错、学过就掉、迁移不动的概念，还原是唯一的出路——因为那些错误正是改写从未发生的信号，而改写只能靠把困境与路径还回来才赢得。

五、一个必须回答的反问

有一个反问会自然出现，而且它相当有力：既然光滑化是文明的必需，那么“接收者被写下一条关于底盘的规则”这件事，会不会也是必需的代价？

换句话说：如果为了积累，我们必须交出一批“只会用而不知来路”的人，这个交易划不划算？

本书的回答分两半，而且要说清楚。

第一半：在很多场合，这个交易是划算的，本书不反对它。一个人一生中会用到无数他不知道来路的东西——他不需要知道电的来路才能开灯，不需要知道十进制的来路才能算账。对绝大多数已经沉为地基的东西，不知来路是正常的、健康的、必要的。第七编第三章那个“死于成功”说的正是这件事：一条路走通了千百遍，熟到沉进身体，那是好事。

第二半，也是本书的全部争点：那条被写下的规则，管的不是某一个对象，是所有对象。一个人可以不知道十进制的来路而毫无损失；但如果他因此写下了“数学对象一般而言没有来路”这条规则，那么他对下一个对象的接收方式就被改变了，而且是不可见地改变了。

代价不落在已经学会的那些东西上，落在还没有学的那些上。这就是第四编要说的全部内容，也是本章这道挡板为什么只挡到这里为止的理由。

六、一份可以照抄的合同：科学与拆迁队的长约

本章第二节说光滑化扛着三件真事，第三节说问题只在“存储的形态被原样当成习得的形态”。但还有一件事本章欠着：既然这道工序不能取消，那么与它相处的最不坏的方式是什么？

有一个现成的答案，而且它已经运行了几百年。

导论第五节那篇哲学史总纲对现代科学跑过一次测试，结论是：科学也没有逃出去，它照样持有免检品。它的申报单上至少有四件：数学的可用性（为什么宇宙偏偏听得懂微

分方程，天天在用而无人能证）；归纳的实践（休谟的问题从未解决，只是被实验室的日常悬置了，而这一默认写不进任何一篇论文的方法节）；仪器链的信任（每台仪器由上一代仪器校准，链条的源头是感官与约定）；以及“可证伪性”这条标准自身不可证伪——它不是科学命题，是立法。

但它与哲学那三十次有一处决定性的不同：

它把这件事制度化了。同行评议、可重复性、公开数据——这些建制等于把“下一环的拆迁队”提前雇进了自己家。

而且它的免检品大多摆在明处：一本教科书的第一章通常直说“本学科假定自然齐一”。

于是那句判词，本书全书采用：

科学没有逃出去，它做了另一件事——与拆迁队签了长期合同：以持续挨拆换取持续承重。

这份合同是本书对第三节那个问题的全部回答。

不能取消光滑化，也不必取消；能做的是把它的产物摆到可以被拆的位置上，并且预先先把拆它的人请进门。这不是一种妥协的姿态，它是一种可以被写进制度的具体安排——同行评议不是道德，是流程；预注册不是谦虚，是格式。

本书全部的自我安排，抄的正是这份合同的格式。编六第三十三章那三个预注册实验、三条撤稿级条件、每一编末尾的可推翻条件、每一章那节“一处对本书不利的读法”——这些不是本书的风格，是本书对这份合同的一次签署。

而这一条同时给出了本书对教学的最终建议的形状，编九与第三十四章会展开，这里先写下它：

一份教材、一节课、一套课程，最不坏的存在方式不是“讲得更准”，是把自己的前提摆在明处，并把检验它的人请进来。

按本章第一节那条判据（定义在第几段），一本“把前提摆在明处”的教材长什么样是可以说清的：它在每一章的第一段告诉读者，这一章的这个东西是为解决什么而出现的；在末尾告诉读者，它在什么情况下不够用。

这两句话加起来不到一页，而绝大多数教材两句都没有。

七、一处可核对的证据：一个不必重走的算例

本章第二节说光滑化的第三件功劳是“后人不必重走那条路”。这句话容易被当作一句空泛的赞美，本节把它变成一个可以算的数。

取一个具体的东西：解一元二次方程。

今天一个初中生学会求根公式，大约需要两三节课。而这条公式背后的路径有多长？

巴比伦的泥板上已有解特定二次问题的算法，用的是配方的几何形式（把一个正方形补全），距今约四千年。丢番图、婆罗摩笈多、花拉子米各自处理过它，而其中花拉子米那本书把它分成六种情形分别讨论——因为他不接受负系数，所以“ $x^2+bx=c$ ”与“ $x^2=bx+c$ ”必须当成两类问题。统一成一条公式，需要先接受负数（本书第十四章那一条），而那件事本身花了几百年。再需要接受负数开方（才有判别式小于零的情形），那又是几百年。

于是那条两三节课就能教完的公式，压着大约四千年、跨越至少四个文明、并且依赖两次本体上的让步（接受负数、接受虚数）。

这个比值是这道工序的效率的直接度量：四千年压成三节课。

本节要说的不是这个比值有多惊人，而是它说明了什么：任何要求“每一代人重新发生一遍”的主张，在这个比值面前都是不可行的。若一个学生必须自己走通那四千年里的每一步，他这辈子学不完初中数学。

这就是这道挡板必须立在编三正中间的全部理由。

而请注意，这个算例同时给出了这道挡板的边界在哪里。那条求根公式的四千年里，有两样东西性质不同：

- 技术性的曲折（六种情形的分类讨论、各种特殊算法）：不必重走，而且重走有害，它们是被更好的表示消化掉的历史包袱。
 - 两次本体上的让步（接受负数、接受虚数）：这两件事，每一个学生仍然要在自己身上发生一次。一个不接受“比没有还少”的学生，用不了那条公式；一个不接受“负数可以开方”的学生，遇到判别式小于零就只会写“无解”而不知道那句话的意思。
- 于是这道挡板的边界可以写得很准：

可以省掉的是路径的曲折，不能省掉的是路径上那几次让步。

而光滑化把两样一起磨掉了。编六第三十章那条“困境常可原样还，路径几乎总要重铺”，说的正是这一处的操作后果：要还的不是那四千年，是那两次让步。

八、一处对本书不利的读法

一条反读，针对的是本章那条张力本身。

反读是：“文明需要磨光，教育需要磨粗”这一对张力，是本书自己造出来的，而且它假定教育的目的是“长进来”。

具体地说：教育的目的可以完全正当是“让人会用”。一个社会需要大量会算账、会看图表、会用统计工具的人，不需要每一个都在自己身上把统计学重新发生一遍。“会用而不知来路”不是失败，是分工。本书把它诊断为病，隐含了一个未经论证的价值前提：深层理解比熟练使用更值得。

本书接受这个指控的核心，并且认为它必须被正面回答，而不是绕开。

第一，本书确实不主张深层理解在一切场合都更值得。编三第十八章第三节那三条判据说正是这件事：大部分内容一份形态就够，只有少数必须两份。一个只需要会用的东西，教到会用为止是正确的，不是失败。

第二，本书的判断不是价值判断，而是一条关于后果的判断，而且它是可以被检验的。本书不说“会用而不知来路是坏的”，本书说的是编四那件事：每一次这样的接收，都在接收者身上写下一条关于所有后续对象的规则。若这条机制不成立，本书这个批评就落空了——这正是编六第三十三章那个实验要判的。

第三，也是本书愿意让步的一处：即使那条机制成立，“划不划算”仍然是一个价值问题，本书不裁决。一个社会完全可以判定：为了效率，接受一部分人的改写权被关掉。本书能做的是把这笔账的另一侧摆出来——代价不落在已经学会的东西上，落在还没有学的那些上（本章第五节）——但这笔账怎么算，不是本书能决定的。

本书唯一坚持的是：这笔账目前根本没有被算过，因为账的另一侧从来没有被记录过。编六第三十三章那张量表，最低限度的用处是让这一侧第一次有一个数字。

九、这一章在全书里的位置

这道挡板立起来之后，本书的判断范围就窄下来了，而且窄得清清楚楚：

- 本书不反对光滑化。

- 本书不反对讲授、定义、严格性、公理化。
- 本书只反对一件事：把存储的形态原样当成习得的形态，并且从未意识到自己在这样做。

下一章要处理这两个形态什么时候可以合用一份、什么时候不能；再下一章要给出一次把它们合用到极限的历史记录，以及那次记录的后果。

第十八章 存储形态与习得形态的分岔

判断卡片：一件知识至少需要两份不同的形态——一份为存储与核查优化，一份为习得优化；两者的要求方向相反，而人类只做了第一份。发现学不是选错了形态，是从未意识到需要两份。本章给出判断何时可以合用一份的三条判据。

一、两份，而不是一份换一份

上一章立了挡板，本章要把它变成可操作的。

先纠正一个几乎必然发生的误读：本书不主张用习得形态替换存储形态。教材里那句干净的定义应当留着，而且应当留在显眼的位置——一个学过的人回头查阅，要的正它是它。

本书主张的是：同一件知识需要两份形态，而人类只做了第一份。

这个说法比“次序错了”更准，因为它解释了为什么次序会错：当只有一份的时候，那一份必然被用于一切用途。

二、两份形态的要求为什么相反

把两份的要求并排列出，会看到它们几乎逐条相反。

	存储形态	习得形态
目标	完整、无歧义、可核查、可搬运	让一件东西在一个还没有它的人那里长出来
对来路的处理	磨掉（来路带不动，且妨碍核查）	还原（来路是唯一能让它挂住的东西）
定义的位置	第一段（便于查阅与引用）	结算点（走通之后才结晶）
冗余	越少越好	必要的冗余（同一件事在几个不同土壤里再长一遍）
失败的痕迹	删除（失败不进档案）	保留（失败是路径的落脚点）
优化对象	单位篇幅的信息量	单位改写的发生率
成功判据	无歧义、可复现	学习者看某个旧东西的眼光变了

请注意最后一行。两份形态连成功判据都不同，因此不可能有一份东西同时把两边都做到最好。一份把每一句都压到最短、每一步都无歧义的文本，恰恰把落脚点全部铲平了；而一份处处停下来让人卡一下的文本，作为档案是灾难。

三、什么时候可以合用一份

不是所有场合都需要两份。给三条判据，全部可以在备课时当场判：

判据一：底盘是否已经厚实。若学习者关于这个概念所依赖的那些东西已经稳固，直接给出光滑成品不仅无害，而且省时。给一位已经熟练掌握实数的学生讲复数的定义，可以直接给；给一位刚学分数的孩子讲“单位 1 平均分成若干份”，不能直接给。

判据二：这个东西是要被使用，还是要被接进底盘。有大量东西只需要被正确使用，不需要改写任何旧理解——记号约定、术语、命名、格式规范。这一类天然只需要存储形态。判断办法：问一句“学会它之后，有没有哪一个旧的看法必须改”。若答案是没有，直接讲。

判据三，也是最灵敏的一条：这个概念有没有一份稳定的错误清单。若一个概念在无数间教室里、被无数位认真的教师教过之后，学生仍在同一个环节犯同一个错——分数比

大小、等号读作“得”、退位减背口令、平均数不知道是匀出来的——那么这个概念必须要第二份形态。因为那份稳定的错误清单，正是改写从未发生的信号，而它已经证明了第一份形态在这里不够用。

三条合起来是一句话：大部分内容一份就够，少数内容必须两份，而必须两份的那些，通常已经被错误清单指出来了。

四、第二份形态由谁来做

这是一个实际问题，而且答案不乐观。

存储形态是由学科共同体做的，做了两千三百年，工艺极其成熟：什么叫一个好的定义、一份严密的证明、一本合格的教材，有公认的标准。

习得形态没有对应的共同体，也没有对应的工艺标准。它被默认为教师的个人才能——“这位老师讲得活”“那位老师有办法”。而个人才能不可积累、不可核查、不可传递，这正是第十三章第四节那三处外包（运气、天赋、偶然）在教师一侧的样子。

于是可以给出本章一个不太客气的判断：

一个学科为它的存储形态投入了两千年，为它的习得形态投入的是每位教师的个人天分。

本书编六那套工序，是对这一处的一个回应——它要提供的不是灵感，是可以被写下来、被检查、被传递的第二份形态的做法。它做得好不好是另一回事，但那个位置确实空着，而且空得很久。

五、一处必须承认的困难

有一个困难本书回避不了：第二份形态很贵。

它贵在三处。课时：还原一个概念的困境与路径，比直接给出定义慢，通常慢一到两倍。师资：教师必须自己先知道这个概念的来路，而绝大多数教师从未被教过它——他们自己也是通过第一份形态学会的。评价：现行的考试主要测第一份形态所对应的能力（是否会用、算得对不对），第二份形态的成果在现行卷面上几乎不加分。

这三条合起来意味着：即使本书全部判断都成立，第二份形态在现实中仍然可能推不动。而推不动的原因不是没人相信，是三条约束同时卡着。

本书对此没有整体解决方案，只有一条策略上的建议，写在这里而不是藏在末尾：不要全面推行，只对第三条判据点名的那几个概念做。一所学校挑三到五个“反复教不好”的老大难，只给这几个做第二份形态，其余照旧。这样课时增加有限、师资准备量可控，而且效果最容易被看见——因为那几个概念本来就是最容易看出差别的地方。

编九第五章会把这条策略写成一份可执行的教研路径。

六、一处可核对的证据：同一位作者的两本书

“两份形态”这件事，最好的证据不是理论，是同一个人对同一件内容写的两本不同的书。这样的例子不多，但有。

一类是教材与教师用书。同一套教材，学生用书上“分数是把单位 1 平均分成若干份”，教师用书上通常会多出：这一课学生常见的错误有哪些、为什么会这样错、可以用什么办法。

请注意教师用书多出来的是什么。它多出的是错误清单与纠正办法——也就是第三条判据说的那份东西。而它通常不多出“这个概念是为解决什么而出现的”。

这一处对本书是半个好消息半个坏消息。好消息：那份错误清单的存在，证明第三条判据（有没有一份稳定的错误清单）是有现实基础的——教材编者早就知道哪些概念反复教不好，而且把它们逐条列了出来。坏消息：知道了这份清单，处置办法仍然是“怎么纠正这个错误”，而不是“这个错误说明改写没有发生”。清单在，用法不同。

另一类是研究专著与入门读物。同一位数学家为同行写的专著与为公众写的普及书，形态往往差别极大：专著从定义与公理起步，普及书几乎必然从一个具体问题、一段历史、一个悖论起步。

这件事本身就证明了两份形态是存在的、可行的、而且写得出来。一位能把某个概念的困境讲得引人入胜的作者，在写专著时不会那样写——不是他不会，是那两份东西的用途不同。

而这也指出了一个真实的空缺：普及书是为不打算学会的读者写的（它可以只讲故事，不要求读者真的走通），专著是为已经会了的读者写的。中间那一份——为正在学的人写的、既有困境又要求走通的——几乎没有人写。

编六第十八章第四节那条判断，在这里得到一个具体的形状：存储形态由学科共同体做了两千年，普及形态由科普作者做了一百年，而习得形态至今没有对应的共同体。

七、一处对本书不利的读法

一条针对“两份形态”这个提法本身的反读。

反读是：“两份形态”这个说法把问题说轻了。真正的困难不是缺一份东西，是这两份东西在同一间教室里必须由同一个人、在同一个四十分钟里同时完成。

具体地说：教师既要让学生走通那条路径（习得形态），又要在下课前给出那个可以被记住、被写进笔记、被考的定义（存储形态）；他不能只做一半。而这两件事在同一节课里是互相干扰的——把时间花在困境上，定义就讲不透；把定义讲透，困境就没时间摆。本书说“需要两份形态”，实际操作时是“一节课里要塞两份”。

这个反读是本书这一编收到的最实的一条，而且本书没有完整的答案。只能给三条部分回应。

第一，两份形态在时间上不必等长。编六第三十章那五步环里，困境（第一步）与结算（第五步）都很短，长的是中间那一步。一节课里摆一个真困境通常只需要五到十分钟，而它不是加在原有内容之外的——它替换掉的是原来那段“引入”，那段时间本来就在。

第二，也是更要紧的：本书不主张每节课都做。编三第十八章那三条判据、编六第三十一章第六节那一问，都是为了把这件事限制在少数概念上。一学期三到五个老大难，不是全部四十多节课。

第三，让步：即使限制在少数概念上，本书也没有解决“同一个人同时做两件事”这个困难。它需要的是教师在同一节课里切换两种模式，而这本身是一项需要训练的技能，本书没有提供训练办法。

这一笔与编六第三十四章第四节那笔（师资）是同一笔账的两面：一面是教师自己是否被封写，一面是教师能否在四十分钟里切换两种形态。两面都欠着，而后一面本书甚至没有把它写进未竟清单——本节是它第一次被写下来。

八、这一章在全书里的位置

两份形态的分岔说清楚之后，就可以去看一次极端案例：一次把存储形态推到极限、并且把它整个下放给儿童的历史实验。那次实验的规模、时间、参与国家、以及它的结果，全部有公开记录。

它是本书全部判断中，唯一一次在外部世界被大规模核查过的。

第十九章 制度化的极限：布尔巴基、新数学，与一次可外部核查的失败

判断卡片：新数学改革是发现范式两千五百年来唯一一次在外部世界被大规模核查的机会，而且核查结果与它的预测方向相反：把对象的正确形态更早、更严格地交给学习者，学习并没有更好。本书不主张一因论——师资、教材、推行节奏都在其中；但那个结构性原因是可指认的，而且它正是本编前六章描述的那道工序被推到极限的样子。

一、把光滑化推到逻辑尽头

一九三〇年代起，一群法国数学家以一个虚构的姓氏为笔名，开始重写整个数学。他们的纲领极其彻底：从集合论出发，逐层定义结构，把每一个概念都呈现为逻辑上无缝衔接的演绎。没有历史，没有动机，没有失败，没有一句“当年人们为什么会想到这个”。

这个工程持续了半个多世纪，出了几十卷。在研究与存档的意义上，它是伟大的成就：它把数学的逻辑骨架擦得雪亮，它使二十世纪数学的统一成为可能，它培养了一整代极为出色的数学家。本书对它的价值没有任何贬低。

但从本编的角度看，它是欧几里得那台机器的最终形态——两千三百年后，同一个次序被推到了它逻辑上的尽头：公理是发生链最末端的结晶，而它被摆到了最前端。

用第十八章的话说：这是人类历史上做得最好的一份存储形态。用第十三章那条判据说：定义摆在第一页，而且第一页之前什么也没有。

二、然后它被下放给了儿童

一九五七年，苏联发射了第一颗人造卫星。西方国家由此产生的震动，很快转化为对中小学数学教育的大规模改革压力：要培养能与之竞争的科学技术人才，就必须让孩子更早接触“真正的现代数学”。

改革的思路直接来自那套纲领：既然现代数学的正确基础是集合与结构，那么就应当从集合、映射、关系教起，从一开始就使用严格的现代语言，而不是那些“不严格”的旧算术。这场改革通称新数学，在多个国家推行了十来年。

请注意这个推理的形状，它是本书全部论证的靶心：

因为这是这门学科正确的形态，

所以这是它应当被交出去的形态。

前一句是对的。后一句不跟着前一句成立，而在整场改革中，没有人质疑过这个“所以”。

三、结果

改革失败了，而且失败得公开、大面积、有记录。

孩子们学会了交集、并集、维恩图，会用集合的语言复述定义，却与真实的数量世界失去了联系；基本运算能力下降；家长辅导不了作业；教师自己也常常不理解为什么要这么教。一位数学家在一九七三年写了一本书来抨击它，书名后来成了那场失败的墓志铭——《为什么约翰不会加法》。到七十年代中后期，多数国家退了回去。

必须公正地说：这场失败有多个原因，本书不主张一因论。师资培训严重不足（教师被要求教一套他们自己刚学会的语言）、教材质量参差、推行过急、家庭无法配合，这些都是真实的、独立的原因，任何一条都足以让一场改革受挫。

但本书要指出那个结构性的原因，而且它可以被单独陈述：

新数学把每一个概念赖以发生的粗糙土壤抹得比传统教学更干净，并且把发生链最末端的结晶摆到了最前端。这是一次以“现代”“严谨”为名、实则加剧了光滑化的改革。

集合语言本身没有问题，它是一件极好的东西。问题在于它被摆在了那些逼出它的困境之前。第十四章第八条已经写明：集合论最初是康德尔处理三角级数表示唯一性时被迫做出来的东西——它是一个技术困境的副产品。一个从来没有遇到过“这些对象怎么才算同一类”“这个表示是不是唯一”这类困境的孩子，拿到“集合”这个词，手里就只有一个词。

四、这次核查为什么在本书里分量最重

哲学争论可以无限进行，因为双方的证据都在对方的解释范围之内。编一编二二十四章反复演示的正是这件事。

新数学不一样。它是一次真实的、大规模的、跨国家的、有对照的、结果公开的干预。

而且它的方向是可判决的：

- 发现范式的预测：把对象的正确形态更早、更严格地交给学习者，学习会更好。
- 本书的预测：把产物磨得越干净、摆得越靠前，接收者越接不住。
- 结果：与前者相反，与后者一致。

这是发现范式两千五百年来第一次在外部世界被核查，而且它没通过。

当然，一次自然实验不能证明一个理论，尤其在有多个混杂因素的情况下。本书对它的定位是准确的：它不是本书的证明，它是本书唯一一份规模级的旁证，而它对发现范式是一份反证。真正的证明要靠可控的、预注册的设计，那在第三十三章。

五、必须挡住的三个误读

这一章最容易被拿去支持三个本书反对的结论，逐条挡住。

误读一：不该教严格的东西。不是。集合语言、公理化、严格定义都是好东西，而且必须教。问题是次序，不是内容。第三十章会给出的五步环，最后一步恰恰是让定义结晶出来——定义没有被取消，它被挪回了它在发生链中本来的位置：最后，而不是最先。

误读二：孩子只需要具体，不需要抽象。不是。这个说法把儿童当成一种低配的成人，而且它与第十章那批观察不符——孩子完全有能力进行抽象，只是抽象要从他自己做过的动作上长出来（皮亚杰的反身抽象），而不是从一个别人已经抽完的成品上开始。

误读三：讲授是错的。不是，而且这是最有害的一条。新数学的失败不能被用来支持任何形式的最小指导教学；恰恰相反，它的失败里有一部分正是教师讲不清楚造成的。本书主张的次序是：学习者先撞到旧办法的边界，然后由教师明确地讲授新结构。第三十二章会完整交代这一立场，包括它在文献里已有的名字，以及那篇著名的批评为什么不适用于本书。

六、一处可核对的证据：一次并非孤例的失败

新数学之所以在本书里分量最重，是因为它可被外部核查。而一次事件容易被归因于特殊情境，所以本节补一件事：同一形状的失败在别处也发生过，而且发生在与数学完全不同的领域。

其一，语文教学中的语法体系。二十世纪中后期，多国的母语教学曾大规模引入形式化的句法分析（成分划分、句型归类）。理由与新数学几乎逐字相同：这是这门学科正确的分析形态，所以应当教给学生。结果也相似：学生学会了给句子画结构图，而写作能力没有相应提升；此后多数国家大幅削减了这部分内容。

其二，物理教学中的公理化尝试。有过若干把力学以严格公理化方式下放给中学生的课程实验，从定义与不变量出发，而不是从落体、斜面、碰撞这些具体现象出发。同样的失败方向：概念的正确形态被摆到了产生它的现象之前。

其三，编程教学中的一段插曲。早期的编程教育中，曾有过强调“先学正确的结构化方法与形式规范，再写程序”的路线。而实际有效的路线普遍是反过来的：先让学生写出一个能跑但很糟的程序，撞上维护困难，再引入结构化方法作为解药。

三件事加上新数学，形状一致：

把一门学科最成熟的形态，摆在产生它的困境之前，交给还没有那些困境的学习者。

而它们失败的方式也一致：学习者学会了操作那套形态（画结构图、写形式定义、背规范），却没有获得它所解决的那件事的感觉。

这一节不是要给本书凑证据——上述三件事本书都只是概述，没有做过史料工作，而且每一件都有它自己的复杂原因。它的作用是另一件事：说明新数学不是数学教育的一次特殊事故，而是一个可以在多个学科里重复观察到的形状。

而这恰恰引出了编六第三十四章第三节那个开放问题：若这个形状真的跨学科重复出现，那么封写就不只在数学里发生。本书没有证据，只有这几件形状相似的事，故那一节把它写成一个应当被核对的旁证，而不是本书的主张。

七、一处对本书不利的读法

一条关于因果归属的反读，而且它是编三最严厉的一条。

反读是：新数学的失败无法支持本书的判断，因为那次改革的混杂因素太多，任何一条都足以解释失败。

具体地：师资培训严重不足（教师被要求教一套自己刚学会的语言）、教材编写仓促、家庭无法配合（家长辅导不了）、推行速度过快、评价体系没有跟上、社会与政治压力扭曲了目标。这六条里任何一条单独就能让一场改革失败，而它们同时存在。

于是本书那条“结构性原因”就成了一个无法与其余六条分开的第七条。而一个无法被分开的原因，在因果推断上等于没有贡献。

这个反读是对的，本书在正文里已经承认了非一因论，但承认得不够。本节把它承认到底。

第一，本书从这次事件里能得到的，严格说来只有一条：它与本书的预测方向一致，与发现范式的预测方向相反。方向一致不是因果证据，它只是没有反证。

第二，本书在正文里那句“发现范式两千五百年来第一次在外部世界被核查，而且它没通过”，措辞过强，本节予以修正。准确的说法是：

发现范式第一次遇到了一个规模级的、公开记录的、与它的预测方向相反的事件；而这个事件由于混杂因素过多，不能作为对它的核查。

这一处修正是本书在编三里做的最重要的一次自我削弱，而它必须做，因为把一次多因事件说成一次核查，正是本书在编四第二十三章要批评的那种“事后归因”的镜像。

第三，也是本书唯一的补救：真正的核查必须来自可控的设计，而不是来自历史事件。编六第三十三章那三个实验存在的理由正在于此——它们的全部意义，就是把这一章无法承担的那份举证责任接过去。

换句话说：本章是本书最有说服力的一章，也是本书证据最弱的一章；而这两件事之所以同时成立，正因为说服力来自规模，证据力来自控制，而这次事件有前者没有后者。

八、一条从这次失败里得到的诊断

最后从这次记录里提取一条可以复用的诊断，它接回第十三章第三节那个“同一性内卷”。

一门学科在它的存储形态上做得越成功，它就越倾向于把那份形态当成自己的全部，也就越难看见第二份形态的必要。做得最好的那一份，遮蔽力也最强。

用第十二章那套语言：布尔巴基是数学史上封得最严的一个黑箱——不是因为它藏了什么，恰恰因为它什么也没藏，它把每一步都写得清清楚楚。它省掉的不是逻辑，是逻辑之外的一切；而正因为逻辑部分做得完美无缺，人们不会觉得那里少了什么。

这一条在编四会以一个更尖锐的形态回来：一件东西被交出去得越顺利，接收者身上被写下那条规则就越硬。光滑化做得最好的地方，恰恰是封写发生得最彻底的地方。

编末小结：这道工序为什么在两派视野里都不可见

一、本编做了什么

编三不再争论上游，它只做一件事：把那道工序拆开、给材料、指位置。

- 第十三章给了它的名字（回溯性本体化）与三个步骤，以及一条判据：不看它省略了多少历史，只看它把定义摆在哪里。
- 第十四章给了九份材料，得出一条：光滑的程度与被磨掉的路径的长度成正比。
- 第十五章指出它最后落地的地方是排版，并给了一个可数的指标："这个概念是为解决什么而出现的"这句话在第几段。
- 第十六章给了三位当事人的自供，并指出那三份自供本身也被光滑化了——这道工序不挑内容。
- 第十七章立了全书最重要的一道挡板：它是文明的必需，不能被取消；问题只在于存储的形态被原样当成了习得的形态。
- 第十八章把这一处写成了"两份形态"，并给了三条判断何时可以合用一份的判据。
- 第十九章给了唯一一次外部核查：新数学，发现范式两千五百年来第一次在教室里被验，而且没通过。

二、它为什么在两派视野里都不可见

现在可以回答本编标题里那个问题了，而且答案由编一编二两编共同提供。

在发现派那里不可见，是因为问句的形状。编一编末已经证成：六次立法都只问"这个对象从哪来"，而当你手上拿着的是一件已经磨光的产物，你能提出的问句只有关于它出身的那一类。你不会去问一颗鹅卵石"你是怎么被接住的"，你只会问"你原来是什么形状"。那道工序不是被否认了，它从来没有进入视野。

在发生派那里不可见，是因为他们赢了另一场。编二六次反攻，每一次都在证明"上游确实有一段过程"，而且证得很好。但证明上游有过程，与追踪产物在下游发生了什么，是两件事。他们把上游拍得越清晰，就越容易以为工作已经做完了。六位里只有拉图尔与伍尔加换了问句，而他们停在了成品上，且为此换了学科。

于是一个奇特的局面：这道工序每天在每一间教室里运行，两派都不看它，而且不看的理由各不相同。

三、一条把编三与编四接起来的判断

本编所有材料指向一件事，但本编不能给出它的机制，只能给出它的形状：

光滑化做得最好的地方，恰恰是接收出问题最严重的地方。

第十四章：越简短、越不容置疑的定义，压着越长的路径。

第十六章：三份控诉这道工序的自供，本身被压成了四个步骤和一张表。

第十九章：人类做得最好的一份存储形态，下放到教室里造成了最大的一次失败。

三条同向。而它们指向一个反直觉的推论：问题不出在光滑化做得不够好的地方，出在它做得太好的地方。

为什么？编三答不出。本编能做的全部，是把这个形状摆出来，并指出它需要一个机制来解释——一个不在传递一侧、而在接收一侧的机制。

编四要给的就是这个机制。

四、这一编怎么派生母题

部件一（发现是发生的一个时相）：本编第十四章那九条是这一部件的直接材料。九个对象，每一个都能查到它作为过程的那一段，以及它作为产物的那一句；两段之间的差，就是这道工序的作用量。

部件二（争论争的是一份归属错觉）：本编第二节给出了这份错觉为何在两侧同时不可见的理由。而第十六章那三份自供提供了一个此前没有的角度：当事人一直知道两个次序不同，他们说了，而且说得很清楚——问题从来不是没人知道，是知道了也进不了那场争论，因为那场争论的问句里没有这一格。

部件三（代价在下次）：本编第三节那条判断是编四的入口。光滑化做得最好的地方接收出问题最严重，这一条在传递一侧无法解释——传递做得越好应该效果越好才对。它必须由接收一侧的某个机制来解释。

本编级可推翻条件：若能找到一个成熟的知识对象，其教学呈现完整保留了逼出它的困境与走通它的路径（土壤与路径均未被磨去），而学习者仍系统性地表现出“它本来就在那里”的先有感，则本编“光滑化是先有感来源”这一判断被推翻。这一条与全书级可推翻条件的第一条同形，因为编三正是全书那一条的主要证据编。

编四 代价：回写杀死了回写

编三末尾留下了一个它自己答不出的问题。

三条材料同向：课本上越简短、越不容置疑的定义，压着越长越丑的路径；三份控诉这道工序的自供，本身被压成了四个步骤和一张表；人类做得最好的一份存储形态，下放到教室里造成了二十世纪最大的一次教学失败。

合起来是一条反直觉的判断：光滑化做得最好的地方，恰恰是接收出问题最严重的地方。

这一条在传递一侧无法解释。传递做得越干净、越清楚、越无歧义，效果应该越好才对。它必须由接收一侧的某个机制来解释，而那个机制此前没有人指认过——编一那六位问句不到那里，编二那六位有三位半走到了门口然后停下。

本编要给的就是这个机制。它是全书的重心，也是全书唯一要求被独立评判的部分。

第二十章 发现学真的没有回写吗

判断卡片：把发现学的失败诊断为“没有回写”，是一个看似自然、实则不准的说法。那半个班的孩子不是茫然，是笃定；而空白不会有信心，只有被写下的东西才会有信心。发现学照样发生回写——它落错了层。笃定，是回写落在元层的签名。

一、一个必须先答的反问

前面十九章一直在说：光滑化磨掉了土壤与路径，而土壤与路径是学习者能够改写自己的唯一凭借，于是改写落空。

这个说法有一个软处，而且追下去，它通向本书全部工作的入口。

回到导论第一节那半个班的孩子。一节精良的分数课，当堂全对；一周之后问 $1/2$ 和 $1/3$ 谁大，近一半的孩子答 $1/3$ 更大。

如果他们那里真的什么也没有被写下，那么一周之后被问到这个问题时，他们应当表现为茫然——不知道该说什么，因为手里根本没有可以用来回答的东西。

可是他们的表现不是茫然，是笃定。 $1/3$ 更大，因为 3 比 2 大。他们答得很快，不犹豫，而且如果你追问“你确定吗”，多数会更确定。

这份笃定不可能来自空白。空白不会有信心。只有被写下的东西才会有信心。

二、那节课在他们身上写下了什么

至少三样，而且这三样都可以被观察到。

其一，世界上有一种叫“分数”的东西，它长成 $1/2$ 这个样子。这一条写进去了，而且写得很牢——他们认得这个记号，会读，会写。

其二，遇到它的时候，可以照着已经有的办法处理。把上下两个数字当成两个数来看，用“数大即大”这条旧规则去比。这一条也写进去了，而且它就是那份笃定的直接来源。

其三，也是最要紧的一条：接住这个新东西，没有要求他改变任何原有的想法。

第三条是隐形的，所以它从来没有被当作那节课的产物。但它是一件确凿发生了的事：分饼、涂色、折纸都做过了，练习全对了，而“数是什么”“什么叫大”这两件事在他那里一动未动，一切照旧——并且课堂反馈告诉他，这样是对的。

用编第二十章的话说：那节课发生了同化，没有发生顺应。而顺应之所以没有发生，不是因为孩子的结构还不到那个阶段（皮亚杰的解释），是因为材料被递过来的形状太合了，一点不合都没有，于是顺应根本没有被召唤。

三、“没有回写”这个诊断为什么不准

于是可以把那个说法改准。

发现学不是没有回写。它照样在学习者的底盘上写东西，而且写得非常成功——上一节那三条，条条都留下了。问题是写在了哪一层。

一个学习者的底盘上，至少有两类可被改写的东西：

对象层，是关于具体对象的理解：什么是数，什么叫大，整数与整数之间有没有别的数。前面各章说的回写，说的一直是这一层——学过分数之后，他看整数的眼光变了。

元层，是关于“数学对象是怎么回事、我该拿它怎么办”的一般规则。它不针对任何一个具体概念，而是规定所有数学概念被如何对待。这一层平时不出声，却在每一次遇到新概念时先行发言。

那节课在对象层空转，在元层结结实实写进去了东西。而元层那一条，正是上一节的第三条。

四、笃定是签名

由此得到一条可以直接拿去用的诊断线索，本编后面反复要用：

笃定，是回写落在元层的签名。

一个真正什么也没写下的孩子会茫然，会说“我不知道”，会重新去数、去比、去试。这样的孩子少，而且教师容易发现他们。

笃定而错的孩子多，而且他们在课堂上看起来比茫然的孩子更像学会了。他们答得快，答得肯定，遇到追问不慌——按编七第三章那套诊断，他们在“过度自治”那一项上表现得非常好，因为他们压根不觉得那是一个反例。

这一条把本书的靶子从“没学会的孩子”移开了。本书要研究的不是那些明显学不会的孩子，是那些看起来学会了、而且看起来学得很好的孩子。

五、把编三那个问题接上

现在可以回答编三编末那个问题的一半了。

编三问：为什么光滑化做得最好的地方，接收出问题最严重？

答案的第一步在这里：因为光滑化做得越好，接收就越顺利；而接收越顺利，上一节那第三条就写得越牢。

请把这一步与编一第二章那条贯穿全书的判断并排放：

第二章（制度层）：光滑化的每一次制度化，不是由某个人决定的，是由某个成功决定的。

第十九章（学科层）：做得最好的那一份，遮蔽力也最强。

本章（个人层）：元层那条规则不是由某次失败写下的，是由某次成功写下的。

三层，同一个形状。这道工序在三个尺度上都是靠成功推进的，而不是靠失败。这是全书脊梁第一次三层同时显形。

六、一处课堂实录：两个孩子的两种“不知道”

编四全编只有一个机制，而机制看不见。本节给一份可以看见的东西。

一次分数补课一周的问答，同一个问题问两个孩子： $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ ，谁大？

孩子甲。答：“ $\frac{1}{3}$ 大。”追问：“为什么？”答：“因为 3 比 2 大。”再追问：“你确定吗？”答：“确定。”教师拿出两块一样的饼，一块切两半、一块切三份，摆在他面前。孩子看了一会儿，说：“哦，那是 $\frac{1}{2}$ 大。”教师问：“那你刚才为什么说 $\frac{1}{3}$ 大？”孩子答：“我以为分数是看下面那个数的。”

孩子乙。答：“我不知道。”追问：“猜一猜？”答：“……不知道，我忘了。”教师拿出两块饼切开。孩子看了很久，说：“这个大。”（指 $\frac{1}{2}$ ）教师问：“为什么？”孩子答：“因为……分的份少？”语调是上扬的，他在问教师。

两个孩子都答错了第一次，而他们错的方式完全不同。

甲有一条规则（看下面那个数），这条规则是他自己造出来的，用来处理这一类新记号；它错，但它是一条完整的、可陈述的、他有信心的规则。他的底盘被写过东西。

乙没有规则，他有的是一个印象和一段遗忘。他不敢答，看了实物才敢，答完还要看教师的脸色。他的底盘上，这一节课几乎什么也没有留下。

教师通常更担心乙——他看起来什么都不会。而本书要说的是：甲的处境更麻烦。

乙那里是一个空位，空位是可以填的；填的办法就是编六第三十章那一套，而且他会接。甲那里不是空位，是一条已经立好的规则，而且那条规则一周之内经受住了作业与练习的检验（因为大多数练习题只要求他写、读、约分，不要求他比大小）。要动甲，得先把那条规则拆掉，而拆一条自己造的、用得挺顺的规则，比填一个空难得多。

更要紧的是甲最后那句话。“我以为分数是看下面那个数的”——这句话里有一个“我以为”。他知道自己有一条规则。这是好消息，说明他的元层还在工作，这条规则还是可讨论的。

真正被封写的孩子，说不出那句话。他不会说“我以为分数是看下面那个数的”，他会说“就是这样啊”，或者更常见的——他会反问：“这个有什么好想的？”

那一句才是签名。

七、一处对本书不利的读法

一条反读，而且它是编四全编最容易被提出、也最难被排除的一条。

反读是：“笃定”根本不需要什么元层规则来解释，它有一个远为简单的解释——遗忘加上旧规则的自动接管。

具体地说：那节课确实教了东西，但一周之后细节忘了，于是孩子回到他最熟悉的那套办法（数大即大）去处理这个问题。他之所以笃定，不是因为底盘上被写了一条关于底盘的规则，只是因为“数大即大”这条旧规则本身就很硬，而新东西太弱、太新、没有竞争力。这是一个纯粹的记忆与竞争问题，不需要任何“元层”。

这个解释更简单，而且它能解释上一节甲的全部表现。按节俭原则，本书应当采用它。

本书的回应有三条，而且必须承认第三条是本书目前唯一站得住的那一条。

第一条（不够强）：遗忘解释不了甲那条新造的规则。“看下面那个数”不是他学分数之前就有的，它是他为了处理这个新记号而现造的。遗忘不会造出规则，它只会留下空白。但这一条可以被反驳：造一条粗糙规则去处理新材料，是普通的同化，不需要元层。

第二条（也不够强）：遗忘解释不了甲的信心。一个知道自己忘了细节的人，通常会犹豫；甲不犹豫。但这一条同样可以被反驳：他不知道自己忘了，因为他有一条自认为够用的规则。

第三条，也是唯一能分开两种解释的一条：两个解释对“补课”作出不同的预测。

按遗忘—竞争解释：把新东西教得更牢、练得更多、复习得更勤，就该解决问题。

按封写解释：教得更牢会把那条元层规则加固得更硬，因而在“补不动”的那一类概念上，加强不但无效，而且方向不对。

这两条预测在数据上分得开，而分开它们的正是编六第三十三章那个 2×2 里的 H2——若“前置解锁”的增益不随元信念强度而变，遗忘解释足够，本书这一编多余。

在那个实验跑完之前，本书必须承认：遗忘—竞争解释是一个更简单、且目前未被排除的竞争者。编四不是靠推翻它立起来的，是靠它作出了一条与之不同、且可以被检验的预测。

八、这一章在全编里的位置

诊断被改准了：不是无回写，是回写落错了层。

但“落错了层”还只是一个位置描述，它还不是一个机制。下一章要把元层那条规则完整写出来——它有几款、每一款的证据由谁发放、为什么它只进不退。

第二十一章 元层回写：底盘上被改写的是一条关于回写的规则

判断卡片：发现学的一堂成功的课，在元层写下的是一条有三款的规则——对象先在、接收不触发改写、可用与理解脱钩。三款各有其证据来源，而且每一款的证据都是每天发放的；更要紧的是，这套证据是不对称的：接住了就确认规则，接不住则归因给学生或教师，规则毫发无损。于是它只进不退。这是一条棘轮。

一、把那条规则写全

上一章说，元层被写进去的是“接住这个新东西，没有要求我改变任何原有的想法”。这句话还太笼统，本节把它写成三款。

其一（对象先在）。数学对象本来就在那里，不是被谁在什么困境里造出来的。

其二（接收不触发改写）。收下一个数学对象，我原有的想法一条都不必动。

其三（可用与理解脱钩）。不明白它从哪来，照样能正确使用它；而正确使用它，就算会了。

三款不是三种说法，是三件不同的事：第一款关于对象的出身，第二款关于我的底盘的写入权限，第三款关于什么算学会。

二、三款的证据由谁发放

一条信念要在一个人身上变硬，靠的不是有人告诉他，是每天有证据到达。这三款各有一个稳定的证据来源，而且三个来源都在教育系统内部日常运转，不需要任何人特意维持。

第一款的证据由教科书的编排发放。编三第十五章已经把这件事落成了可数的：翻开任何一章，“这个概念是为解决什么而出现的”这句话出现在第几段。答案通常是不出现，或者在末尾。一个从第一页就是定义、而定义之前什么也没有的对象，在感知上就是先在的。这一款不需要任何人说出口，它由排版说出。

第二款的证据由课堂的顺利发放。请注意这一条的形状：如果收下一个概念需要改动旧理解，学习者会感到别扭——一种“我原来想的好像不对”的不适。而一堂精良的发现学课，恰恰以“不别扭”为品质标准：讲得清楚、例子贴切、过渡自然、当堂练习全对。教师越是尽责，第二款拿到的证据就越硬。

这一条对教师是不公平的，但它是真的。而且它解释了一件在教育研究里长期令人困惑的事：发现学式教师的尽责，与学生的接不住之间那道鸿沟，通常被归因为“讲得还不够好”，于是补救的办法是讲得更清楚——而更清楚正好把这一款再加固一次。

第三款的证据由练习与考试发放，而且发放得最密集、最权威。做对就是会了，这是学生每天领到的最硬的一条反馈，一学期几百次。第三款之所以最毒，是因为它有一个自我维持的回路：只要试卷主要测“会不会用”，第三款就永远是对的——在那张卷子的意义上，它确实是对的。

三、这套证据是不对称的

上一节还不足以解释这条规则为什么会越来越硬。真正的原因在证据的不对称。

考虑两种情形：

情形一，一件光滑成品被顺利接住。→ 规则得到确认：果然，收下它不需要我改什么。

情形二，一件光滑成品没有被接住。→ 归因不落在规则上。它落在两个地方：落在学生身上（“我没学好”“我数学不行”“这块我脑子转不过来”），或者落在教师身上（“讲得不够清楚”“练得不够多”）。

两种情形都不构成对规则的反证。第一种正面确认它，第二种被制度性地归因给了别处。

于是这条规则没有任何可以被日常经验推翻的通道。它不是一条被反复检验而幸存的信念，它是一条在原理上收不到反证的信念。

用一个更精确的词：这是一条棘轮。它只进不退，因为它的反向齿被归因机制卡住了。

四、编一那六次立法，在这里显出了它们的出身

现在可以把编一那一整编接上了，而且接得很紧。

编一逐章记录了六次立法，六个户头，五种答案，共同的动作是回溯性本体化。而本章第一款——“对象先在”——正是那六次立法的日常版本。

请注意两者的关系不是比喻，是同一条命题的两个尺度：

- 柏拉图为它另立了一个世界，一个十岁的孩子只是觉得“5 本来就在那儿”。
- 康德把它守到了主体的先天形式，一个中学生只是觉得“三角形内角和是 180° ，这有什么好问的”。
- 哥德尔说他能看见集合论的对象，一位数学系学生只是觉得那些公理“显然应该是这样”。

上面那一行是哲学史，下面那一行是每天在发生的事；而下面那一行不是上面那一行的通俗版，是上面那一行的来源。

这是本书对编一那六位最重要的一次改判，而且它比编一自己走得更远。编一说：他们把产物当成了起点。本章说：他们那个“产物显得像起点”的感受，本身是每天被生产出来的；而生产它的，正是他们自己那一代所受的教育。

一个思想家在四十岁写下“数学对象是先存的”，他调用的不是一次推理，是三十年里每天到达的证据。先在感不是一个哲学立场，它是一份长期账户的余额。

五、编二那六次反攻，在这里显出了它们为什么必须另立先在

编二编末给出了那条整齐的判断：每一次反攻在它取胜的那一处，都必须为自己另立一个先在。当时给的理由是结构性的——问句要求一个来源。

本章可以给出第二个、也是更实在的理由。

那六位反攻者，自己也是这套教育的产物。他们可以在对象层推翻某个具体的先在（形式不在别处、定义是产物、事实是被造的），但第一款作为一条元层规则，不会因为对象层的任何一次推翻而松动。

于是他们的处境是这样的：他们成功地证明了“这一个对象不是先在的”，而他们底盘上那条“这类东西总得有个先在的来源”的规则依然在运行，并且立刻要求他们指出新的来源在哪里。

他们不是在逻辑上被迫另立一个先在，他们是在底盘上被迫的。

这一条把编二那条判断从“问句的语法要求一个主语”推进到了“问的人身上有一条规则要求一个主语”，而后者是可以被检验的（第三十三章的量表正是测这一条）。

六、三款各自的可测形式

本章最后把三款各写成一个可以直接问出口的问题，它们是第三十三章那张量表的原型：

款	内容	一句可以当场问的话
其一	对象先在	你学分数之前，分数在哪里？
其二	接收不触发改写	学了它以后，你原来对什么东西的看法变了吗？
其三	可用与理解脱钩	如果你答不出为什么，那是你的问题，还是这个知识的问题？

三问都不问“你懂不懂”。问“你懂不懂”测的是第一款以下的东西；这三问测的是第一款本身。

七、一处课堂实录：那三款各自被听见的样子

三款规则是本书构造出来的，学生不会用这种话说它们。本节记下它们在课堂上实际被听见的样子——这些句子任何一位教师都听过。

第一款（对象先在）被听见时的样子：

- “这个是谁规定的？”——这一句是第一款还没有装好的信号，值得高兴。
- “书上就是这么写的。”
- 教师问“为什么内角和是 180 度”，学生答：“它就是 **180** 度啊。”
- 最典型的一句，出现在被追问三次之后：“这个还要问为什么吗？”

第二款（接收不触发改写）被听见时的样子：

- “老师，这跟上节课那个有关系吗？”——这一句同样是好消息，说明他还在找连接。
- “所以这个是新的一章，对吧？”（意思是：旧的那些可以先放着）
- 教师问“学了分数，你现在怎么看整数”，学生沉默，然后答：“整数？整数还是整数啊。”
- 高年级版本，最完整的一句：“老师，你直接讲结论吧。”

第三款（可用与理解脱钩）被听见时的样子：

- “会做题就行了吧？”
- “这个考不考？”
- 学生做对了一整页练习，教师问“你能说说这是什么意思吗”，答：“我不知道，反正这么做就对了。”
- 而最要紧的一句，是学生答不出理由却仍然自认为会了——这句话通常不出声，它表现为：他做完题就合上本子，不觉得还剩下什么没弄明白。

请注意这三组句子的一个共同点：它们没有一句是学生“说错了”。

在现行的评价体系里，说“书上就是这么写的”没有错，说“会做题就行了吧”甚至是务实的，做对一整页练习是好事。三款规则从来不表现为错误，它们表现为一种恰当。这是它们几乎从不被诊断出来的原因——没有任何一次测验会把它们标红。

也正因如此，编六第三十一章那一问才必须专门问出口。它不会自己冒出来，你不问，它就永远不出现。

八、一处对本书不利的读法

一条来自教学一线的反读，而且它相当扎实。

反读是：上一节那些句子，绝大多数根本不反映什么“元层规则”，它们反映的是学生对课堂情境的正确判断。

一个学生说“这个考不考”，不是因为他相信“可用与理解脱钩”，是因为他确实要考试，而时间有限。一个学生说“老师你直接讲结论吧”，可能只是因为下课还有五分钟，他想赶紧记下来。把这些完全理性的、情境性的反应，读成一套深层的元信念，是过度诠释。

这个反读是对的，而且本书接受它对上一节那些句子的大部分解释。

但它有一个边界，而且边界的位置正是本书的争点：

一个理性的情境判断，重复一万次之后，与一条元层规则的行为后果没有区别。

一个学生因为要考试而只关心会不会做，这是理性的；他在十二年里每天这样理性一次，那么在第十三年，当有人给他一个不考的、只关于来路的问题时，他的反应不再是一次判断，是一次默认。理性的重复会沉淀成不假思索。

而这一条恰好可以被检验，而且检验的办法就在这个反读里：

若那些句子只是情境判断，那么改变情境就应当改变它们。

明确告诉学生“这个不考，只是想听听你怎么想的”，然后问那三问。若在这个情境下学生答得出“它本可以不是这样”，那么本书这一编说的东西大部分不成立——那只是应试策略，不是元层规则。

这一条应当被写进编六第三十三章那张量表的施测规程，而且必须写进去。附录四第一节那条“记录纪律”就是为它准备的一半；另一半是施测语——测 π 之前必须明确声明这不计入成绩、不是考试、没有标准答案。若不声明，测到的是应试策略；声明了仍然测到高分，测到的才可能是元信念。

本节因此不是在为本书辩护，是在给本书的读数补一条它本来漏掉的效度威胁。

九、这一章在全编里的位置

三款规则写全了，证据来源指认了，棘轮机制说明了。

但到这里为止，本书还只是描述了一条越来越硬的信念。一条硬信念还不是灾难——世界上有大量又硬又无害的信念。下一章要说明这条信念累积到极处会变成什么，以及为什么它会长出一副先验的外观。

第二十二章 加固与先验的虚幻

判断卡片：那条规则不是一次写成的，它在每一堂成功的课上被重写一次，而每一次重写都让它更硬。累积产物是一种具备先验之全部外观、实则习得的自明感——本书称之为先验的虚幻。它与康德的先验幻相同名而异质：康德的源于理性自身的结构，故不可消除；本书的源于一段可指认的传递史，故可测量、可解锁。而“对象先在”这件事本身也被光滑化了——它的来路，就是没有人记得自己是在哪一堂课上开始这么觉得的。

一、加固

上一章那条规则不是在某一天被写下的。它在每一堂课上被重写一次。

一个孩子从六岁到十八岁，在数学课上接住的光滑成品数以千计：每一个新记号、每一条新规则、每一个新定义。每一次顺利接住，那条规则就再被确认一次。

本书把这个累积过程称为加固。

加固与“习惯”不同，差别值得说清楚。习惯是行为的重复；加固是一条元层规则的证据余额在增长。一个人可以改掉一个习惯，因为习惯不带着自己的辩护；而一条被上千次确认过的规则，任何单次反例都动不了它——它有一整个账户在背后。

加固的速度还不是均匀的。上一章第二款那条最不公平的话在这里再说一次：教得越好，加固越快。一堂讲得清清楚楚、例子贴切、全班当堂全对的课，是这条规则一次质量极高的确认；一堂讲得糊里糊涂、学生一头雾水的课，反而没那么有效——因为糊涂里有别扭，而别扭是唯一可能松动第二款的东西。

这是本书最反直觉、也最不受欢迎的一条推论，而它直接来自编一第二章那条判断的个人版：那道工序靠成功推进，不靠失败。

二、累积产物：先验的虚幻

加固到一定程度，会产生一种感受。这种感受具备“先验”的全部形式标记：

- 它显得必然：就是这样，不可能是别的样子。
- 它显得普遍：对谁都一样，跟人无关。
- 它显得先于经验：不是从哪里推出来的。
- 它显得无来路：问它“为什么”是没有意义的问题。

四条标记全中，而它是习得的。本书把它命名为先验的虚幻。

请注意这个命名说的是什么、不说什么。它说：那份自明感有一段可指认的来历。它不说：那份自明感所指向的命题为假。一个人可以出于完全错误的理由，对一件完全正确的事情感到自明。这一点在第五节的挡板里会写死。

三、它自己也被光滑化了

现在要做本编第一次自指的应用，而且这一步是本书对编一那一整编的最后一笔。

编一第二章把“对象先在”称作发现范式的一块地基；编三第十三章把它称作回溯性本体化的产物。两者都还不够准。最准的说法是：

“对象先在”是一件被反复加固出来的产物，而它自己的来路也被磨掉了。

而它的来路被磨掉这件事有一个非常具体的形式：没有人记得自己是在哪一年、哪一堂课上，开始觉得数学对象本来就在那儿的。

试着回想。你能想起你第一次觉得“5 是一个东西”是什么时候吗？你能想起你是在哪一节课上开始不再问“为什么内角和是 180 度”的吗？几乎没有人能。

这正是光滑化完成的标志——土壤（无数课堂里那种"收下就好"的顺利）与路径（十几年的加固）都被抹去，只剩一个光滑的显露：一种不容置疑的自明感，被端在那里，仿佛不需要来路。

于是发现范式那三块看似天经地义的地基，至此可以完整交代出身了：它们不是假设，是沉积物。

四、与康德的先验幻相：一条必须当场划清的界

"先验的虚幻"这个说法，与康德的先验幻相只隔一层纸。借用它是有意的一一编一第四章已经说过，这是康德给本书的工具。但必须当场把界划清，否则整节会被读成对康德的误解。

	康德的先验幻相	本书的先验的虚幻
来源	理性自身的结构	一段具体的教学与传递史
普遍性	对一切有理性者成立	只对受过某一类教学的人成立；未受者不具备
可消除性	不可消除，只能被揭示	可解锁，且解锁办法可写成课堂工序
检验方式	先验论证	剂量效应与逆转实验（第三十三章）
出错的方向	理性越纯粹越难免	教得越好越严重

最后一行是两者最尖锐的分歧，也是本书这一命题最容易被检验的地方：康德的幻相与教育无关，本书的虚幻与教育成正比。

本书借康德的名，是为了指出一件他不曾考虑的可能：有一类"先验感"不是理性的结构，而是教育的沉积。这个判断如果成立，它并不推翻先验哲学，只是从后者手里划走一块地皮——一块此前被默认属于理性结构、实际上属于传递史的地皮。

这块地皮有多大，本书不作估计，而且明确表示不知道。本书只主张，小学数学课堂上那种"5 本来就在那儿"的自明感，落在这块地皮之内。至于范畴、因果、空间时间这些康德真正关心的东西是否也落在里面，本书没有材料，也不打算猜。

五、一道不可省的挡板：本书不取消数学的必然性

这道挡板在编三第十三章第七节立过一次，在这里必须立第二次，而且要立得更死——因为本章是全书最容易滑过去的地方。

本书主张：学习者身上那种"它本来就在"的感受，是被制造出来的。

本书不主张：数学命题的必然性是幻觉。

前者关于人，后者关于命题。两者不能互推，而且理由在编一第五章已经给足：弗雷格证成了数学命题的真值不依赖任何人的心理过程，本书全书接受这一条，不打折扣。本书离了这条分界立不住。

把它落到一个具体例子上。三角形内角和是否必然为两直角，这个问题的答案本书不裁决，它属于数学哲学。但一个十岁的孩子觉得它"天然自明、不需要理由、问为什么没有意义"，这件事是被造出来的，本书裁决这一条，而且认为造它的正是他每天上的那种课。

一个命题可以既是必然的，又是被人一步步做出来的；也可以既是必然的，又不该以"不需要理由"的姿态交给一个孩子。必然性属于命题，自明感属于人；把后者当成前者

的直接证据，正是发现范式最深的一次混淆——而这次混淆，编一那六位一位不落，全都犯了。

编二第八章那位维柯，则是从另一个方向滑出去的标本：他从“我们造了它”推出“它只关于我们”。两边都滑，滑的方向相反，而滑的原因相同——都把“人这一侧的事”与“命题那一侧的事”当成了一件事。第二十八章会用这把刀重审实在论与建构论那组对峙。

六、一处课堂实录：一次成功的加固

加固是一个累积过程，看不见。但它有一个可以看见的瞬间——一件东西被顺利接住的那一刻。本节记一次。

五年级，“圆的周长”。教师上得非常好。

先量：拿几个不同大小的圆形物件，用绳子绕一圈，量周长，再量直径，做除法。三次，得到 3.1、3.14、3.2 左右。学生自己发现这个比值大致是个定值。教师这时说：这个数就叫圆周率，写作 π ，约等于 3.14。学生记下。练习，全对。

这是一堂好课。它有测量、有归纳、有学生自己的发现，比直接给公式好得多。按编六第三十章那五步，它做到了前三步。

而请看那一刻发生了什么。

学生量出了 3.1、3.14、3.2 三个不同的数，然后教师给了一个精确的、固定的、不再变化的 π 。学生没有任何别扭地接住了它。没有一个学生问：“我们量出来的是三个不一样的数，你怎么知道真的是 **3.14159.....**而不是别的？”

这个问题是这堂课上最重要的问题，而它没有被问，也不需要被问——因为学生的底盘上已经有一条规则：测量是粗糙的，真值在那里，我们的任务是逼近它。

这条规则不是这堂课教的，是前面五年每天教的。而这堂课又一次确认了它：我们量得毛毛糙糙，老师给出精确的那个，一切照旧。

于是加固完成，而且这次加固的质量极高——因为课上得好，因为学生亲手量了，因为他自己“发现”了那个定值。他的经验完整地支持了那条规则。

这就是编四第二十二章第一节那句最不受欢迎的话的现场：教得越好，加固越快。

顺带说，那个没被问的问题是有答案的，而且是数学史上极精彩的一段： π 不是量出来的。阿基米德用正九十六边形夹逼，得到它在 $3+10/71$ 与 $3+1/7$ 之间——他用的不是尺子，是一条推理的路径。这一段若被讲出来，这堂课的性质会完全不同：学生会撞见“量不出来的东西可以被算出来”，而那正是一次真正的改写。

它没有被讲，不是因为教师不知道，多半是因为它不考。

七、一处对本书不利的读法

一条来自科学哲学方向的反读，而且它击中的是“先验的虚幻”这个命名本身。

反读是：上一节那条规则——“测量是粗糙的，真值在那里”——不是一个被制造出来的幻觉，它是一条正确的、在科学上极其有用的方法论原则。

一个不相信测量误差与真值之分的学生，将无法学会任何实验科学；这条区分是近代科学最重要的成就之一。本书把它读成“加固”，等于把一条应当被教会的东西说成了病。

本书接受这个指控的前半，而且认为它非常重要：那条规则是对的，而且必须教。

不接受的是后半，理由要说得精确：

本书的判断不落在那条规则的内容上，落在它是否曾经被质疑过一次。

一个学生若在某一刻真的问过"你怎么知道真的是 3.14159", 然后被带着看了阿基米德那条路径, 他从此拥有的不是同一条规则——他拥有的是一条有理由的规则: "在这一类场合, 真值可以由推理确定, 而测量只能逼近它。"

而一个从未问过的学生, 拥有的是一条没有理由的规则, 而且它的边界是模糊的——他会把它一并用到那些真值并不存在、或者根本不该那么问的场合去。

两条规则的措辞一样, 行为后果不一样。而区别不在内容, 在它有没有过一次来路。

这一处也是本书对"先验的虚幻"这个命名必须做的一次收窄, 写在明处:

本书不主张那些被自明地接受的东西是假的。本书主张的是: 它们被自明地接受这件事, 是被造出来的; 而一件对的东西被自明地接受, 与它被有理由地接受, 在后果上不同。

一个正确的信念, 也可以是被封写着的。而这一条比原来那句更强, 因为它不需要那条信念是错的——它把本书的靶子从"错误的信念"移到了"没有来路的接受", 而后者是一个大得多、也隐蔽得多的类。

八、这一章在全编里的位置

到这里为止, 本书描述的还只是一条越来越硬的信念, 和它长出来的一副先验外观。

而一条硬信念还不是灾难。世界上有大量又硬又无害的信念——一个人可以牢牢相信一件无关紧要的事, 而这不妨碍他学任何东西。

下一章要说明的是: 这条规则不是一条普通的信念。它的第二款不是关于对象的信念, 是一条关于底盘写入权限的规定; 而一条写入权限的规定一旦生效, 它管的是还写不写这件事本身。

第二十三章 封写：一个认知动作的成功，取消了它自己的后续

判断卡片：第二款不是一条关于对象的信念，是一条关于底盘写入权限的规定；它一旦写下，后续的对象层改写就不再被触发——不是被禁止，是不再被调用。于是回写的一次成功执行，取消了它自己后续执行的条件。这是本书所知唯一一处，一个认知动作的成功取消了它自己的后续。“杀死”一词须当场收紧：写下的是一把锁，不是销毁了写头。

一、第二款的性质与另两款不同

上一章说“一条硬信念还不是灾难”。本节要指出，三款里有一款不是信念。

第一款（对象先在）是一条关于对象出身的信念。它可能错，但错了也只是一个错误的看法。

第三款（可用与理解脱钩）是一条关于什么算学会的标准。它可能有害，但它的害处是评价上的。

第二款（接收不触发改写）表面上像一条关于数学对象的信念，其实不是。它是一条关于底盘写入权限的规定。

它规定的是：数学对象不属于那一类有资格改写我的东西。

一条写入权限规则与一条普通信念，性质完全不同：普通信念是被写进去的内容，可以被新内容顶替；写入权限规则一旦生效，它管的是还写不写这件事本身。

二、封写

于是发生了这样一件事：

元层的那次回写，写下的内容恰好是一条使后续对象层回写不再被触发的规则。

请注意“不再被触发”这个说法，它比“被禁止”准确得多，而且差别很实。

不是被禁止。底盘并没有立起一道防线去抵抗新概念。若是抵抗，会有摩擦，会有别扭，会有“我不接受”——那些都是可观察的信号，教师能看见。

是不再被调用。新的数学对象进来，被顺利归档，归档过程平顺无声。任何“我原来的想法可能不对”的信号都不会升起，因为按第二款，这类对象与“我原来的想法”从来不发生关系。没有摩擦，没有别扭，没有信号。

把这一条压成一句，就是本书的第二个核心命题：

发现，是回写杀死了回写。

这是本书所知的唯一一处，一个认知动作的成功执行，取消了它自己后续执行的条件。写成一条链：

光滑化作用于知识：一件带着土壤与路径的发生，被磨成一个只剩显露的成品。

元层回写发生在人：成品被顺利接住，底盘上添入三款规则。

封写：第二款一旦在底盘上，对象层回写不再被触发。

所以：回写（元层） $\Rightarrow$ 不回写（对象层）。

这条链是自反的：第二款是一条关于回写的规则，而它自己正是被回写写进去的。发生的机制在这里咬住了自己的尾巴。

三、"杀死"必须当场收紧

"杀死"这个词若照字面理解，本书立刻自我否认，所以必须在提出它的同一节里收紧。

理由有二。

其一，若封写真的不可逆，那么去光滑化就不可能成功，本书从编六到编九的全部处方随之作废。一个自己取消自己纲领的理论，按它自己在下一节要给出的判据，恰恰是最可疑的那一种。

其二，一个反例就够了：任何一个成年之后真正重新理解过某个数学概念的人——那种"原来它是这么来的"的时刻——都证明通道可以重开。这样的人不罕见，读到本书这一页的读者里可能就有。

所以准确的说法是：

回写写下的是一把锁，不是销毁了写头。

本书称之为封写：机制完好无损，通道被一条规则挡住。锁有三个性质，每一个都有教学后果。

其一，锁可以被解开，但解锁的动作与纠正一个对象层的误解不是同一种动作。补讲、多练、换一个更好的例子、找一位更耐心的老师——这些全都打在对象层，全都撞在锁上。这解释了一件教师普遍经历、却从未被解释过的事：为什么某些概念，无论换多少种教法、补多少次课，都补不动。

其二，解锁的动作必须打在第二款本身上。它只有一个形式：让学习者亲历一次"这个对象本可以不是这样"。不是听说，是亲历——他必须自己站在那个岔路口上，看见另一条路也走得通，或者看见当年的人差一点就选了别的。第三十一章会把它做成三个具体动作。

其三，锁的强度随加固次数上升，因此解锁所需的代价随学龄上升。这不是不可逆，是活化能升高。它给出一个可测的推论：同一堂去光滑化的课，在低年级比在高年级有效；而在高年级，同一堂课若前置解锁，效果应当被显著拉回。第三十三章把这个推论写成了预注册实验。

这次收紧不是退让。它把一句口号换成了一个有边界、可操作、可证伪的命题，并且直接推出了一道原先没有的工序。

四、第四种死亡

发生学原有三种"死法"，用来诊断一个概念在学习者那里的状态。三种全部发生在对象层。封写是第四种，发生在元层。

名称	层	死法	好坏	验法
遗忘	对象层	没人再用它，它从问题解决中消失	坏	还有没有人拿它去解决新问题
死于成功	对象层	熟到不假思索，沉为地基	好	会不会再对它感到惊讶
过度自洽	对象层	对一切追问都有现成答案却不会用	最危险的假会	给一个反例，看他慌不慌
封写	元层	"不必改"这条规则沉为地基	最坏	问"它本可以不是这样吗"——答不出，或觉得这问题

				没有意义
--	--	--	--	------

封写与"死于成功"是同一个形状——某样东西沉进底盘、变得不可见——只是层次不同：死于成功沉下去的是一条路径，沉下去是好事；封写沉下去的是一条关于走不走路径的规则，沉下去是灾难。

封写之所以最坏，还有一个结构性的理由，而且这个理由改变了诊断的次序：

它使前三种诊断失效。

一个被封写的学习者，在"过度自洽"的检验下可能表现得很好——给他一个反例，他不慌，但不是因为他真懂，而是因为他压根不认为那是一个反例。在"死于成功"的检验下也可能表现得很好——他对这个概念不再惊讶，但不是因为它已沉为地基，而是因为它从未在他那里升起过。

因此诊断的次序必须改：先查封写，再查前三种。次序一错，前三种检验会给出系统性的假阳性。

五、把编三那个问题答完

现在可以把编三编末那个问题的另一半答完了。

编三问：为什么光滑化做得最好的地方，接收出问题最严重？

第二十章答了一半：光滑化做得越好，接收越顺利，元层那条规则写得越牢。

本章答另一半：而第二款写牢的后果，不是一条错误的信念，是通道被封。

于是三条材料各归其位：

- 第十四章（越简短的定义压着越长的路径）：定义越简短，它前面什么也没有，第一款拿到的证据越硬。
- 第十六章（三份自供被压成一张表）：被压成表，正因为读者的第二款已经在运行——他要的是可以直接用的成品，而"为什么写这本书"那一段在他那里没有落点。读者不是懒，是通道封着。
- 第十九章（最好的存储形态造成最大的教学失败）：新数学把成品磨得比任何时候都干净、递得比任何时候都早，于是第一款与第二款在极短时间内被极大量地加固。那场失败不是因为孩子学不会集合，是因为那套课程在最短时间内把最多的通道封上了。

三条同向，而且现在有了统一的机制。

六、第三种失败模式

封写还补上了本书原先缺的一块。

编七第四章将指出一种失败：教师把发生过程演示了一遍，学生只是旁观——还原不等于放录像。编十一第二章将指出另一种：走那条路的脚必须是学生自己的——不可代办。两者都假定，只要路径真的被学生亲自走通，改写就会发生。

封写说明这个假定不成立。存在第三种失败：

课去光滑化得很好，困境摆出来了，路径学生也亲自走通了——改写照样不发生。因为通道是封的。

这一种最令人沮丧，因为教师在教学法上一步没错；也最容易被误读成"这个孩子就是不行"。而它恰好是编三第十三章第四节那三处外包（运气、天赋、偶然）落到一个具体孩子身上的样子。

那一节曾说：在研究界"创新机制交给天赋"是一句无害的口头禅，在教室里它是一份终身判决。现在可以说得更准：

路走通了也可能不算数，若改写权没有先被解开。

这就是为什么编六要在发生五步之前，加上一道原来没有的工序。

七、一处课堂实录：解锁失败的一次

封写的教学后果，最清楚的证据不是失败的常规课，是一堂什么都做对了、仍然无效的课。本节记一次，而且它是本书最重要的一份材料。

六年级，分数比大小的补课。教师这次准备得极充分：

不从定义起。先摆困境：三个饼分给四个人。让学生真的分、真的画、真的剪。让他们给每一份命名，写出 $\frac{3}{4}$ 。再让他们把四个 $\frac{1}{4}$ 拼回一整块。再换情境：绳子、蛋糕、一段路。全程动手，没有一句"你们记住"。

按编六第三十章那五步，这节课是标准的。当堂效果也好，学生投入，做得对。

一个月后，再问那个问题： $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 谁大。

班上仍有相当一部分学生答" $\frac{1}{3}$ 大"。

而更值得记的，是那几个平时成绩最好的学生在动手环节的表现。

他们礼貌地配合。剪了，拼了，写了。其中一个在拼到一半时抬头问："老师，这个待会儿是不是就是要讲通分？"

请仔细看这一句。

他没有在走那条路径。他在定位这节课——他在判断这段活动最后会落到哪一个知识点上，好把它归档。剪和拼在他那里不是路径，是通向那个知识点的过场。

而他这样做是完全理性的，因为在他十二年的经验里，每一次活动最后都会落到一个知识点上，而知识点才是要记的东西。他的元层规则告诉他：这一段可以快进。

于是那堂课在他身上落空了，而落空的原因不在教学法：困境摆了，路径铺了，脚也是他自己的。是通道封着。

这一节是编四第二十三章第六节那个"第三种失败模式"的现场，也是本书全部工序为什么必须在五步之前加一道的全部理由。

顺带记一句，那位教师后来做了一件对的事。她没有再补一次课。她下一次上课时，先花了十分钟问："如果当初人们不这样规定， $\frac{1}{2}$ 可以写成别的样子吗？"那十分钟，就是编六第三十一章那道工序的雏形。

八、一处对本书不利的读法

一条对"封写"这个概念本身的反读，而且它是编四最尖锐的一条。

反读是："通道被封"这个说法，是不可证伪的。

具体地说：任何一次去光滑化的失败，本书都可以宣布是封写造成的；而任何一次成功，本书都可以宣布是通道开着。"封写"因此不是一个解释，是一个事后的标签，它对失败的解释力是无限的，而无限的解释力等于零。

这个指控是致命的，而且本书在编六第三十三章第一节自己写了同样的话："凡是补救无效的，都可以事后宣布那是被封写了——那正是本书自己认定的最危险的假会。"

本书的防御只有一条，但那条是硬的：封写必须在干预之前被测量。

这就是先在感指数存在的全部理由。若 π 只能在失败之后被推断，本书这一编确实是不可证伪的；而若 π 可以在上课之前被测出来，并且它预测了这节课在谁那里会失败，那么它就是一个真的变量。

于是编六第三十三章那个 2×2 的设计要点，不是"有没有解锁"这个对比，而是分层：先测 π ，再分层，再随机分派。**H2** 那个交互项，就是这条防御的全部内容。

而这也意味着一件本书必须承认的事：

在 π 被证明可测、可信、且有预测力之前，"封写"这个概念在方法论上是欠账的。

本节不给这笔账打折。编四是全书重心，而它目前站在一个尚未兑现的读数上。前言第三节把这一条列为"我最没把握的四处"之首，本节是它的展开。

九、这一章在全编里的位置

机制给完了。但一个新提出的机制，最容易犯的毛病是它其实是别人早已命名过的东西换了个名字。下一章要逐条处理八位占位者——五位在"先前的学习阻断后续的学习"这个形状上，三位在"来路被忘掉之后显得自然"这个形状上。其中两位在编二已经出过场，对他们的分界必须划得比对别人更细。

第二十四章 八位占位者：逐条辨异

判断卡片：本书提出的机制，形状上有八位占位者，五位在“先前的学习阻断后续的学习”这条线上，三位在“来路被忘掉之后显得自然”这条线上。八位都是真的，且都比本书早。本书的增量只有两处：阻断者不是防卫、不是错类、不是定势、不是图式冲突，而是回写这个动作本身；被阻断的不是方法、不是范畴，而是改写权。这两条加起来，是本书唯一要求被独立评判的地方。

一、为什么这一章不能省

一个新提出的机制，最常见的下场不是被驳倒，是被指出它其实是某个已有概念换了个名字。

而这个下场往往是对的。编第三十三章那条判据在这里要对本书自己用一次：一个体系若不能说清自己与最近的邻居差在哪里，它提供的就不是新机制，是新词汇。

本章逐条处理八位。次序按“离本书有多近”排，最近的在前。

二、第一条线：先前的学习阻断后续的学习

贝特森的次级学习。他指出学习分层：一层是在给定框架内学会应对，另一层是学会那个框架本身；而后者一旦形成便几乎不可修订，修订它的那一层罕见、艰难且带有危险。这是本书最近的先行者之一。

分界在规则管的是什么。他那一层是关于情境的规则——在这一类情境里该怎么学；本书的第二款是关于写入权限的规则——这一类对象是否有资格改写我。前者管学法，后者管改写权。此外，他没有主张那一层是被前一层的成功写下的；本书主张的恰是这一条，而且第二十章已经把它做成了三层同形的判断。

阿吉里斯与舍恩的单环与双环学习。他们指出，在既定的支配变量内做修正（单环）时的成功，会系统性地阻断对支配变量本身的修订（双环），并把这归因于防卫性常规——为避免尴尬与威胁而生的自我封闭。

同形，但动力相反，而这构成一个可判决的对照：他们的阻断需要防卫动机，本书的封写不需要任何动机，它是一次中性的、顺利的、令人愉快的成功接收的副产品。推论是刺耳的：

一个毫无防卫、完全配合、每次都学得很好的孩子，恰恰是被封写得最彻底的那一个。

按防卫性常规的理论，这样的孩子应当最不容易被阻断；按本书，最容易。这一分歧可以在数据上分开，第三十三章的分层抽样正是为它设计的。

芝的自体误归类。她指出，一个概念若被归入错误的自体范畴（如把“热”当作物质而非过程），则在同一范畴内的任何再教学都无法纠正它，必须发生范畴迁移。这是教育文献中最强的竞争解释。

分界在病灶部位。她说的是对象被归错了类，错在归类；本书说的是写入权限被取消，与对象归在哪一类无关。两者预测不同，而且可以在同一个实验里分开——按她的理论，把对象重新归类即可解；按本书，归类纠正而权限未解，仍然无效。第三十三章第五节给出这个判决实验，且明写：若范畴纠正单独就把效果拉满，本书相对她无增量，本节这条分界作废。

卢钦斯的定势效应。反复奏效的解法会阻断对更简解法的知觉，这在数学解题中是经典发现。

分界在层次。定势是方法层的——明明有一条更好的路，人看不见它；封写是权限层的——不是看不见更好的路，而是不认为这里有“路”这回事。这个差别有一个干净的操作后果：定势常常可被一句提示解除（“试试别的办法”），封写不能——“试试别的办法”这句话预设了存在别的办法，而被封写的学习者的困难恰恰在于，他不认为一个数学对象会有“办法”或“来路”这种东西。

皮亚杰的同化与顺应。这是本书最近的祖宗，而且编二十章已经把话说在了明处：本书所说的回写，在他的语言里就是顺应。

编二那一章给了分界，这里要把它写死并加一层。在他那里，僵化源于图式对不合的材料强行同化，冲突存在而主体不肯改；在本书这里，光滑成品被顺利同化，一点不合都没有，所以顺应根本没有被触发。

他的病是“不合而不肯改”，本书的病是“太合而无需改”。

后者远为隐蔽，因为它不产生任何冲突信号——而认知冲突正是几乎所有概念转变教学法赖以启动的那个信号。这也解释了为什么以制造认知冲突为核心的补救教学，在这类概念上常常无从下手：它在等一个不会出现的信号。

三、第二条线：来路被忘掉之后显得自然

布迪厄的 **doxa** 与“起源的失忆”。他指出，任意的社会安排之所以显得自然而不容置疑，正因为它被造出来的那段历史被遗忘了；历史变成了第二自然。这与本书第二十二章第三节是同一个形状，而且他给出的是一套完整的社会学机制。

分界在载体与可逆性。他的 **doxa** 沉在身体化的惯习里，其松动通常需要场域危机这样的外部事件；本书的第二款沉在一段可指认的、逐次累积的学习史里，因而可以用一道二十分钟的课堂工序去松动，并且这一松动可以被测量。把一个社会学的诊断，换成一件教研可以当堂做、当堂验的事，是本书在这条线上的全部增量；理论上的深度，本书不如他。

伯格与卢克曼的物化。他们说，人的活动的产物被当作非人为的、自然的东西，而这一转换正是通过社会化写进每一个新成员的。这几乎就是本书第二十二章的加固，只是场域是社会实在而不是数学对象。

分界在是否有反向机制。他们描述了物化如何被传下去，却没有给出“去物化”的操作；本书的重点恰恰在反向那一半——解锁与去光滑化是两道可写成教案的工序。此外，他们的物化针对制度，本书针对认知对象，而数学对象是最不像人造物、因而物化最难以察觉的一类。

拉图尔的黑箱化。编二第十二章已经给他记了一整章的功劳，本书方法直接来自他，所以这条分界必须划得比别人细。

分界在黑箱关的是谁。他的黑箱封在知识共同体一侧——没有人再去追问那个事实是怎么造出来的；本书的封写封在学习者一侧，而且封住的不是对那个对象的追问，是他对自己底盘的改写权。

这两件事可以分开，而且分得开这一点是决定性的：一个人可以完全知道分数是被人造出来的（黑箱是开的），却仍然不期待任何数学对象要求他改变看法（写保护仍在）。一位读过数学史、能讲负数接纳史的中学教师，完全可能在自己的课堂上执行最彻底的光滑化——这不是伪善，这是两把锁，开了一把没开另一把。

再顺带记一位：事后聪明偏差与“知识的诅咒”——一旦知道了，人就再也回不到不知道的状态，并系统性地高估那件事的显而易见程度。这解释了教师一侧的一半：教师自己

被封写得比学生更彻底，因而真心觉得那个定义是自明的、不需要来路的。第三十四章那句“一位从未觉得数学本可以是别的样子”的教师，无法带学生去松动这条规则”，其机制正在这里。

四、八条合起来说明了什么

把两条线放在一起看：

“来路被忘掉之后显得自然”这件事，社会学、科学论与心理学都已各自说过。

“先前的学习阻断后续的学习”这件事，学习理论也已各自说过。

本书没有发现新大陆。本书做的是把这两条线在一个具体的位置上接起来，而接点是回写：

正是回写这个动作，一边造出了自然感，一边关掉了改写权，而且是同一次动作、同一条规则。

拆开来是两条早已存在的判断，接起来是一件此前没有被提出的事。而这个接点，是本书唯一要求被独立评判的东西。

五、把增量写成两句，以便被攻击

为了让它可以被精确地攻击，把增量压成两句：

其一，阻断者不是防卫、不是错类、不是定势、不是图式冲突，而是回写这个动作本身。

其二，被阻断的不是方法、不是范畴，而是改写权。

任何一位读者，若能指出上述八位中有一位已经同时说出了这两条，本章即告作废，本书编四应降格为对该位工作的教育学应用。这不是修辞上的谦虚，这是一条可核对的失败条件，而且核对成本很低——去查那八位的原文即可。

六、一处课堂实录：一位教师身上的封写

编四前几章的材料全部来自学生。本节记一次教师身上的，因为它是这一编欠得最重的那笔账（编六第三十四章第四节）的现场。

一次教研活动，讨论“等号”这一课。一位教龄十几年、公认教得很好的教师，被问到一个问题：

“为什么等号是两条一样长的平行线？”

她愣了一下，然后笑了：“这……这就是个符号啊。”

追问：“当年为什么不用别的？”她想了想，说：“可能是因为好写吧。”

这个回答里没有任何错误，而且大多数人会觉得这个问题本身有点无聊。

而那个符号是有来历的，而且来历相当有意思：十六世纪一位英国医生兼数学家在一本代数书里第一次用了它，理由他自己写在了书里——没有比两条等长的平行线更相等的东西了。在此之前，人们写“等于”用的是一个拉丁词的缩写；这个符号被接受用了将近一百年，其间还有别的候选。

请注意这段来历如果被知道，会改变什么。

它会改变“等号”这一课。编六第三十二章第六个案例说，等号最要紧的一层是它是关系符不是箭头，而“两条等长的平行线”这个来历，恰恰把这一层直接摆在了眼前——造这个符号的人想表达的就是“两边一样”，而不是“算出来是”。那个来历本身就是那一课的困境与路径。

而这位教师不知道它，而且更要紧的是：她从来没有想过要知道。

这不是懈怠。她备课认真，教学效果好，对学生有耐心。她只是从来不觉得一个数学符号会有来历这回事——而这，按编四第二十一章那三款，正是第一款在她身上的样子。

教师自己被封写得比学生更彻底，理由在第三节那位心理学家那里：一旦知道了，人就再也回不到不知道的状态，并系统性地高估那件事的显而易见程度。她教了十几年等号，等号在她那里早已沉进地基；沉得越深，“它本可以不是这样”这个问题就越显得没有意义。

编六那套工序默认教师的通道是开着的。这一节说明那个默认是靠不住的。

七、一处对本书不利的读法

编四最后一条反读，针对的是本编的整个策略。

反读是：本编把八位占位者逐条切开之后，剩下的那两句增量太窄了，窄到不足以支撑一整编，更不足以支撑一本书的重心。

具体地说：把“阻断者是回写这个动作本身”与“被阻断的是改写权”这两句拿掉外壳看，它们说的是一——先前学习的成功会形成一种默认，使后续的深层改变不被触发。而这句话，几乎是第二节那五位占位者的最大公约数。本书做的可能只是给它换了一套词汇，并配了一个教育场景。

本书对这条反读的态度是：它可能是对的，而且本书已经把判定权交出去了。

第五节那条失败条件写得很明白：任何一位读者，若能指出那八位中有一位已经同时说出了那两句，本章即告作废，编四应降格为对该位工作的教育学应用。核对成本很低，去查原文即可。

但要补一句，因为它关系到读者该怎么用这一编：

即使那个降格发生了，编三与编六仍然成立。

编三那道工序的解剖（三步操作、九份材料、排版、新数学）不依赖封写；编六那套还原工序也不依赖它——它依赖的是有效失败那条线已有的证据。真正会随封写一起倒的，是第三十一章那道解锁工序，因为它是唯一从这个机制推出来的东西。

本书因此有两种可能的结局，而且两种都写在明处：

结局一，封写立住：本书是一本关于“传递如何在接收端关掉改写权”的书，编四是它的核心。

结局二，封写倒了：本书是一本“把一场两千五百年的争论重审为工序问题”的书，编一、二、三、五立住，编四降为对既有工作的应用，编六只剩还原那一半。

本书希望是结局一，但它把结局二也预先安排好了位置。按编四第二十三章那张表的第四行——一个不能被问“它本可以不是这样吗”的理论，是被自己封写的理论。本书对自己执行这一条的方式，就是在自己的重心章节里，写下它倒掉之后剩什么。

八、这一章在全编里的位置

分界划完了。下一节收编，把编四对母题的派生写清，并交代它留给编五和编六的两件事。

编末小结：从"上游是什么"到"下游发生了什么"

一、这一编做了什么

编四回答的是编三答不出的那个问题：为什么光滑化做得最好的地方，接收出问题最严重。

- 第二十章改准了诊断：不是没有回写，是回写落错了层；并给了识别码——笃定，是回写落在元层的签名。
- 第二十一章把元层那条规则写成三款，指认了三个每天发放证据的来源，并指出这套证据不对称，故它是一条只进不退的棘轮。
- 第二十二章给了累积产物：先验的虚幻；并与康德划清了界（康德的与教育无关，本书的与教育成正比），立了必然性挡板。
- 第二十三章给了机制：第二款不是信念，是写入权限规则；一次成功的回写取消了自己的后续；收紧了"杀死"（写下的是锁，不是销毁写头）；给了第四种死亡与诊断次序的改判。
- 第二十四章逐条处理八位占位者，把增量压成两句以便被攻击。

二、全书脊梁在这一编第一次三层同时显形（第四节补第四层）

编一第二章立过一条贯穿全书的判断，本编让它在三个尺度上同时成立：

制度层（第二章）：光滑化的每一次制度化，不是由某个人决定的，是由某个成功决定的。

学科层（第十九章）：做得最好的那一份，遮蔽力也最强。

个人层（第二十、二十三章）：元层那条规则不是由某次失败写下的，是由某次成功写下的。

三层同形，而且这个形状本身是本书对整场争论最不受欢迎的一句话：

这道工序在三个尺度上都靠成功推进，不靠失败。

因此它不可能被"做得更好"所解决。一切"讲得更清楚、例子更贴切、练习更充分"的改进，在这个机制下都是加固。这是本书与几乎所有教学改进方案的分歧所在，也是它最容易被判为悲观的地方——而第六编要说明它不悲观，因为解锁是一个方向不同、而不是程度更大的动作。

三、编一编二在这里各自被改判一次

对编一的改判。编一说：那六位把产物当成了起点。本编说：他们那个"产物显得像起点"的感受，本身是每天被生产出来的。一个思想家在四十岁写下"数学对象是先存的"，他调用的不是一次推理，是三十年里每天到达的证据。先在感不是一个哲学立场，是一份长期账户的余额。

对编二的改判。编二说：每一次反攻都必须为自己另立一个先在，理由是问句要求一个来源。本编给了第二个、更实在的理由：那六位自己也是这套教育的产物。他们可以在对象层推翻某个具体的先在，而第一款作为一条元层规则不会因为对象层的任何一次推翻而松动，并且立刻要求他们指出新的来源。他们不是在逻辑上被迫另立一个先在，是在底盘上被迫的。

后一条比前一条重要，因为它可以被检验。一条关于逻辑的判断只能被论证，一条关于底盘的判断可以被测量。

四、第四层：哲学史层

编四编末原来给了三层。导论第五节那篇哲学史总纲给出了第四层，而且是最上面的一层，本节把它接上。

那篇文章的第二条规则是：发生这把刀，总是只对前人开刃。每一环的解构者都掌握发生学的全部技艺，而且技艺一代比一代精——休谟解剖因果的手法比洛克解剖天赋观念精细，尼采解剖道德的手法又比休谟精细，福柯解剖真理体制的手法再比尼采精细。但无论刀法多精，刀总是恰好自己的地基前收住。

它的推论是反直觉的，也正是本编要的那一句：

解构技艺的进步不会终结序列，只会加深序列——刀越锋利，它停下的那个位置就显得越神圣。

于是四层：

哲学史层：刀越锋利，它停下的那个位置就显得越神圣。

制度层：光滑化的每一次制度化，不是由某个人决定的，是由某个成功决定的。

学科层：做得最好的那一份，遮蔽力也最强。

个人层：元层那条规则不是由某次失败写下的，是由某次成功写下的。

四层，同一个形状。而请把最上面那层与最下面那层并排读一遍：

最会拆别人地基的人，自己的地基埋得最深。

最会教的老师，学生那条规则加固得最快。

两句在结构上逐字对应，而它们所处的尺度相差两千五百年与四十分钟。

这是本书能得到的最强的一次交叉验证——它不是本书从自己的框架里推出来的，是另一份材料在另一个尺度上独立得到的。

而它的方向对本书不利，这一点必须写在这里而不是留到末章。一本论证"这道工序靠成功推进"的书，若它成功了，就会把它自己那条立足点埋得比谁都深。按第四层那条规则，本书越是把编四写得锋利，本书自己停下的那个位置就越显得神圣。

本书对此没有免疫办法。它能做的只有第三十四章第五节那件事：把自己停下的位置指出来，并交出可推翻条件。而按那篇总纲的说法，这件事有一个准确的名字——报关：走私犯人人有，但报关的走私犯给了海关地址，他的私货被查到时损失可控、可追、可换。

五、一条必须补上的、方向相反的挡板

编三第十七章立了一道挡板：光滑化是文明的必需，不能取消。那道挡板讲的是为什么不能取消这道工序。

那篇总纲的第四条规则给出另一道方向相反的挡板，本编原来欠着它，此处补上：

解构不摧毁前人，而是完成前人。

被显形的东西并不作废。柏拉图的理念被解构之后，活在整个西方语言的"本质/现象"语法里；康德的范畴被历史化之后，仍是认知科学的脚手架。淘汰的从来不是理论的用途，只是理论的身份：从"永恒的发现"降格为"有效的发生物"。而且降格之后它往往更耐用了——因为它不再需要为自己的永恒性辩护，不再需要供养一支护教的学派军队，它可以纯粹凭效用活着。

那篇文章给这一条一个说法，本书全书采用：

显形不是拆迁，是产权变更登记。

这道挡板落到本书自己的题目上，形状是这样的：

一个被封写的学习者，他手里那些概念一件也没有作废。他会写分数、会算、会用，而且用得对。封写夺走的不是他已经拿到的那些东西，是他与下一个东西之间的关系。

于是编四那条最要紧的话可以说得更准：

代价不落在已经学会的那些东西上，落在还没有学的那些上；而已经学会的那些，一件也不会因为本书的诊断而贬值。

这一条对读者尤其要紧，因为编四读到这里，最容易产生的一个反应是“那我这些年学的数学岂不是白学了”。没有白学。你会的那些东西照样管用，照样是真的，照样能解决问题。改变的只是它们的身份，不是它们的用途。

而这一条同样适用于三十位哲学家、适用于那篇总纲、也适用于本书自己。

六、这一编怎么派生母题

部件一（发现是发生的一个时相）：本编把“时相”这个说法坐实到了接收端。同一件东西，在生产端是一条跑完的链，在接收端是一件被端出来的成品——而接收端拿到的那个时相，决定了他写下什么。

部件二（争论争的是一份归属错觉）：第二十一章第四、五节给出了这份错觉何以在两派同时存在的机制。双方争论者都带着同一条元层规则进场，而那条规则要求一个来源；发现派把来源指给对象，发生派把来源指给构造者。两派在争论之前，就已经被同一件事塑造过了。这是本书对母题第二部件最深的一次派生，也是编五第二十五章改判“发现／发明”那一组的直接依据。

部件三（代价在下次）：本编就是这一部件。三章合起来给出了它的完整形式：代价不落在已经学会的那些东西上，落在还没有学的那些上；而落下去的方式，是把改写权关掉。

七、留给后两编的两件事

留给编五的：本编第二十一章那条“双方在争论之前已被同一件事塑造过”，需要被兑现成四组具体的改判。编五要用同一把尺子量四组老对峙，并逐组给出可裁决的形式。

留给编六的：本编第二十三章那三个锁的性质，各推出一道工序——锁可解（故有出路）、解锁动作与纠错不同类（故不能靠补讲）、活化能随学龄升高（故要早、且高年级要前置）。编六要把它们做成可以从明天一节课上手的東西，并把整套主张交给第三十三章那三个实验去承担风险。

八、本编级可推翻条件

三条，逐条写死。

其一，若元信念强度的读数（第三十三章的量表）在同一批人上的两周重测信度低于 0.70，或它与已有的认识论信念量表相关高于 0.85，则本编没有提出新读数，应改写为对既有构念的应用。

其二，若“前置解锁”与“元信念强度”的交互项不显著或效应量过小，则封写假说的核心不成立，本编第二十三章须删除，本书退回“回写落错了层”这个较弱的诊断。

其三，若第二十四章那八位占位者中有一位已经同时说出了本书那两句增量，则第二十四章作废，本编应降格为对该位工作的教育学应用。

第二条是三条里最重的。它意味着本编——全书的重心——是一个待检的假说，不是一个结论。在第三十三章那三个实验跑完之前，读者应当照此看待它。

编五 重审：四组老对峙的改判

前四编做完了两件事：编一编二摆出两侧，编三编四给出工序与它在接收端的后果。本编要回过头，用后者去重审前者。

要重审的是四组对峙。它们分属四个不同的领域——数学哲学、认识论、教学法、科学论——而本编要论证，四组是同一处误置的四个面，而且四次改判用的是同一把尺子。

那把尺子在编三第十三章第七节第一次亮出来，在编四第二十二章第五节被立死：

命题一侧的事，与接收者一侧的事，是两件事。

四组对峙之所以各自纠缠了数百年，是因为双方都在同时谈论这两侧，而且换来换去自己不觉得。

第二十五章 发现／发明：一个由工序制造出来的问题

判断卡片：这个问题不是难，是空。两派对同一个对象给出相反的出身推测，而它们对任何可观察的事情都不作出不同的预测——包括对数学实践，也包括对学习者的。一个不产生任何差别预测的问题，不是一个悬而未决的问题，是一个被那道工序制造出来、且在原理上不含裁决信息的问题。本书不加入它，本书解释它。

一、先把它逼到最窄

两千五百年的争论，可以逼成一句问话： π 在人类出现之前，存在吗？

发现派说存在。发生派说不存在——在没有人去做圆、量圆、比较周长与直径之前，“圆周与直径之比”这件事没有被任何东西提出过。

请注意这个问句的形状：它问的是一个不可能有观察者的场合。任何试图回答它的证据，都必须来自有观察者之后。这不是修辞上的刁难，这是这个问句的结构。

二、决定性的检验：两派在什么地方作出不同的预测

一个问题是否实质，最硬的判据是：持相反立场的人，对什么可观察的事情作出不同的预期？

逐项过一遍。

关于数学内部的事。哥德巴赫猜想的真假、连续统假设的地位、下一个大定理会不会被证出来——两派的预期完全相同。一位柏拉图主义者与一位构造主义者，在同一间办公室里可以做几十年同事而不产生任何工作上的分歧，这是事实，不是玩笑。唯一的例外在编二第九章：布劳威尔那一派确实对什么算合法的证明有不同看法，而那是一个关于逻辑规则的分歧，不是关于对象出身的分歧——一个人完全可以是柏拉图主义者兼直觉主义者，也可以反过来。

关于数学史的事。负数被抗拒了几百年，两派都承认；两派的解释不同（“找得慢”对“造得难”），但没有一条可查的史料能把这两种解释分开。

关于教学的事。这一项最要紧，而结果最尴尬：两派对怎么教一个孩子，都不作出任何预测。你可以是柏拉图主义者而主张从困境教起，也可以是构造主义者而每一章从定义开始——这两种组合在现实中都大量存在。编三第十五章那个“定义在第几段”的指标，与教师的本体论立场之间没有相关。

三项过完，结论只能是：

这两个立场对任何可观察的事情都不作出不同的预测。

三、这不是“难”，是“空”——一个须在第八节收窄的说法

通常人们把这种局面解释为“这个问题太深了”。本书给出另一个解释，而且它是编一编二编二十四位思想家的实际做法证成的。

编一编末指出：发现派六次立法用了五个不同的户头，各自都能自治地解释全部现象。编二编末指出：发生派六次反攻用了六个不同的户头，各自也都能自治地解释全部现象。

一个能被十一种互不相容的方案同等地解释的现象，通常不是因为证据不足，而是因为现象本身不含裁决这些方案所需的信息。

而它之所以不含——这是本书的答案——是因为含着那个信息的东西，在它成为现象之前就被磨掉了。

两派争论的对象永远是一个已经成熟的对象。他们指着 π 、指着 ζ 函数、指着三角形内角和。他们从来不指着一个正在成形的东西问这个问题，因为一个还在改、还没有名字、还不知道立不立得住的东西，根本提不出这个问句——它还不是一个“东西”，它还没有那个可以被追问出身的、边界清楚的形状。

于是：

这个问题的提出条件，正是那道工序的产物。而那道工序恰好是一道把上游抹掉的工序。

两个人对着一块被水冲刷了千万年的鹅卵石争论它原来是不是圆的——使它可以被拿在手里端详的那个过程，正是抹掉它原来形状的那个过程。

两千五百年不是一个失败的时长，它是一个正常的时长。

四、还要加一层：双方是被同一件事塑造出来的

编四第二十一章第五节给了这一章第二个、也是更深的依据。

争论双方都带着同一条元层规则进场：这类东西总得有一个来源。这条规则不是他们论证出来的，是他们各自三十年的教育每天写进去的。

于是双方的分歧，实际上发生在这条规则内部：一派把来源指给对象，一派把来源指给构造者。而“必须有一个来源”这件事，两派从未争论过，因为它不在争论的视野里——它是提问的语法本身。

编二编末那条判断在这里获得完整形式：

发现派把先在放在对象一侧，发生派把先在放在构造者一侧；两派各自都需要一个先在，因为那个问句的语法里必须有一个主语。而那条语法，是被写进去的。

一场争论的双方，若在争论开始之前就已经被同一件事塑造过，那么这场争论不可能触及那件事。

五、本书的位置，第三次说明

必须再说一次，因为读到这里最容易发生的误读是把本书划进发生派。

本书不是发生派。发生派与发现派争的是同一个问题，本书认为那个问题是空的。若一定要给本书一个位置，它在争论的下游：它研究的不是这件东西从哪来，是这件东西一旦成形，会以什么形状被交出去，以及交出去的时候接收者身上发生了什么。

这个位置有一个具体的好处：它对上游那个问题保持中立，而且这份中立是可以被检验的。本书全部判断——三款规则、加固、封写、第四种死亡、三个实验——在“ π 在人类出现之前是否存在”这个问题上取任何一个答案，都照样成立。一个真正下游的理论，应当对上游的争论不敏感；若它敏感，说明它偷偷站了队。

六、数学那份双重判决：两派各自看见的都是真的

本章第二节论证两派对任何可观察的事情都不作出不同预测，第三节把它归因于“证据不含裁决信息”。这两节都是关于证据的判断。

编二第六节交出了一份关于对象的判断，它比本章原来给的更好，本节把它接上并展开——因为它解释了一件本章原来解释不了的事：为什么这场争论既不可裁决，又不可解散。

那份判决是这样的：

作为公理选型与概念工程，数学是发生的——有历史、有派系、有身体来源；作为选定前提后的推论强制，它最接近“不由人”。

两半都是真的。

前一半的材料编三第十四章已经给足：非欧几何显形了“唯一真几何”（平行公理换掉照样自洽，几何从“空间的真相”降格为“公理的选型”）；集合论悖论与不完备定理显形了“完备地基”之梦；直觉主义与构造主义从工序层显形——连“什么算一个证明”都有学派史。

后一半的材料同样硬，而且它是发现派全部力量的来源：你可以选公理，选定之后推论就不由你。任何文明、任何星球，只要接受同样的前提，就必然抵达同样的定理。这不是一个立场，这是一件每天在发生的事。

七、棋

编二引了一个比方，本节把它展开，因为它是本书处理这一组对峙最好用的一件工具。

数学像棋。

马走日是发生的——什么时候定的、为什么这么定、别的棋种怎么走，全部可查，而且各文明的棋规互不相同。规则是被人做出来的，这一点没有争议。

而规则一定，“当头炮之后马来跳”是不是最优应着，就不由任何人了。你可以下得不好，但你不能规定它是好的。这份强制不是任何人立的，它是规则一旦被接受就随之而来的东西。

于是：序列拆得掉“唯一真棋”，拆不掉“落子无悔”。

把这个比方对回那场争论：

- 发现派看见的是“落子无悔”那一半——数学真理不由人，铁一样硬，谁也改不动。他们看见的是真的。
- 发生派看见的是“马走日是定的”那一半——每一个概念、每一条公理、每一个记号都可以查到来历。他们看见的也是真的。

两派站在同一个对象的两个面上，而那个对象确实有两个面。

于是这场争论的形状被说得准了：它不可裁决，因为两派各自的证据都是真的；它不可解散，因为两个面都在那里。它只能被重新描述——而重新描述的第一步，是承认没有一个统一的答案，因为问题问的是一个有两个面的东西。

而本书要指出的那件事在这两个面之间：

数学半只脚在序列外——而那半只，恰恰踩在“接受前提”这个发生动作上。

“接受前提”是一个动作。它有时间、有主体、有条件、可以不发生。而在它发生之后，一切就都不由人了。

发现派把注意力放在“之后”，发生派放在“之前”，而那个动作本身没有人在看。而本书全书的题目，恰恰就是那个动作在一个具体的人身上如何发生、或者如何不发生——一个从未“接受”过前提、只是被交给了结论的学习者，他站在这个动作的哪一侧？

答案是：他站在“之后”，而他从未走过“之前”。他拿到的是一整套推论强制，而没有拿到那个使强制生效的接受动作。这正是编四那件事的另一种说法。

八、这份判决对本章那条判断的修正

本章第三节说这个问题“不含裁决信息”。这个说法可以保留，但要加一句限定，否则它把话说得比应有的更死。

准确的说法是：

"数学对象是被发现的还是被发明的"之所以不含裁决信息，不是因为这个问题空洞，是因为它问的是一个有两个面的东西，而它的语法只允许一个答案。

一个只有一个空格的问句，问一件有两个面的事，当然填不出答案。

这个修正使本章的判决从"这个问题是空的"变成了一句更准也更弱的话，而更弱在这里是对的——编五第七节那条反读已经指出，本书没有资格把整个本体论判为空。本节给出的是那条反读所要求的收窄的正面形式：

本书不主张那个问题无意义。本书主张的是，它的问法只留了一个空格。

而把两个面分开之后，两个可以分别回答的问题就出来了，且都是实质的：

其一（关于"之后"）：一套前提一旦被接受，它的推论强制从何而来？——这是数学哲学的问题，本书不作回答。

其二（关于"之前"）：接受前提这个动作，在一个具体的人身上如何发生？——这是本书的问题，而且本书认为它此前没有被当作一个问题。

两千五百年里，所有的力气都花在了第一个问题上。

九、那个老问题里，什么是可以留下的

把一个问题判为空，还要负责说明它为什么那么有吸引力，以及它里面有没有可以打捞的东西。

有一件，而且它相当有用：数学家在实际工作中确实要判断"这个东西是该去找，还是该去造"。

这是一个启发式的问题，不是本体论的问题。它问的是：面对当前这个困境，我应当去搜索一个已有结构里可能藏着的東西，还是应当去构造一个新对象？两条路的工作方式、资源投入、失败信号完全不同，判断错了代价很大。

编二第九章那个例子正是如此：伽罗瓦面对"五次方程有没有根式解"，选的是造——他造了一套关于置换的语言；而他本可以继续找那个公式，像他之前两百年的人那样。这个判断是真的，重要的，而且可以被训练。

它与那个本体论问句只共用词面。"该去找还是该去造"是一个关于下一步动作的问题；"它本来在不在那里"是一个关于两千年前的问题。前者有答案，后者没有。

十、一处对本书不利的读法

这一章判了一个提了两千五百年的问题是空的。这样的判决必须承受最重的反驳，而最强的一条来自数学哲学内部。

反读是："两派不作出不同预测"这个检验，本身预设了一种狭窄的意义标准。

具体地说，本章第二节用的是一条实证主义的判据：一个命题若不对任何可观察的事情作出不同预测，它就是空的。而这条判据本身在二十世纪已经被反复批评过，最著名的一条批评是：这条判据自己也不对任何可观察的事情作出预测，因而按它自己的标准，它是空的。

更实质的一层：本体论问题本来就不以预测差异为标准。"是否存在抽象对象""因果关系是不是一种实在的关系""可能世界是不是真的存在"——这一整类问题都不作出观察预测，而没有人因此认为它们不值得问。用一条实证主义的筛子去筛本体论，等于宣布本体论整体为空，而这不是本章想要的结论。

本书接受这个反读的主体，并把第二节那个判决收窄到不能再窄。

第一处收窄：本章不主张那个问题无意义。这一点第三节末尾说过一次，这里必须写死：本书不宣称" π 在人类出现之前是否存在"是一个假问题，也不宣称本体论是空的。本书主张的只有一条更窄的：

这场争论所依赖的那批证据，不含裁决它所需的信息；而不含的原因是可指认的（那道工序抹掉了它）。

证据不足与问题无意义是两回事。本章原来的措辞（"不是难，是空"）把两者混在了一起，本节予以修正：准确的说法是"不是证据不够，是这批证据在原理上不可能够"。

第二处收窄：本书没有资格评判那些不依赖这批证据的论证。数学哲学里有大量不诉诸"感受"或"历史"的论证——不可或缺性论证、结构主义的各种版本、对指称与真的语义学分析。这些论证是否成功，本书完全没有立场，因为它们不落在本书的证据面上。

于是本章的判决从"这个问题是空的"降格为一句范围明确的话：

凡以"数学对象显得先在"这种感受为依据的论证——无论哪一派——都不可能裁决这场争论，因为那份感受本身是被制造出来的。而不以它为依据的论证，本书不予评论。

这个降格使本章弱了，也使它站得更稳。而它同时把编四的位置说得更清楚：编四不是在解决那个本体论问题，它是在解释为什么其中一类证据不可用。

十一、这一章在全编里的位置

第一组对峙改判完毕：不是悬而未决，是不含裁决信息；而不含的原因是可指认的。

下一组更古老，也更实：如果对象的出身问不出结果，那么"我们凭什么知道它必然如此"这个问题总该有答案吧。第二十六章要论证，这个问题两派也都答错了，而且错在同一个地方。

第二十六章 先天／后天：必然性既不在印象里，也不在灵魂里，在路径里

判断卡片：唯理论与经验论的失败同源——两派都把经验理解成一堆被动接收的印象，而不是一条被走出来的路径。在被动印象的理解下，必然性当然长不出来，于是一派把它记在灵魂名下，一派承认它只是习惯。而一条被走通的路径本身携带必然性：一个亲手把三角形三个角撕下来拼成直线的孩子，撞见的不是“这一千个都是”，是“为什么必然是”。这一改判有一个可测的签名。

一、这一组的实际形状

这一组对峙比第一组更实，因为它直接落在“我凭什么知道”上。

唯理论：必然性不可能来自经验，因为经验只给个别；所以它必定原本就在我这里（天赋观念、努斯、直观形式）。

经验论：一切来自经验；而经验只给个别，所以严格说来我们并没有必然性，我们只是习惯了。

编一第三章已经把这两侧摆过：笛卡尔的天赋观念，与洛克的反手；而洛克的反手打中了软处，却把问题交还给了对方，休谟随即把它推到了极致。

双方谁也没有赢。康德的方案（编一第四章）是对这个僵局的一次极漂亮的绕开，而绕开的代价是把产物提升为条件，从此免于被追问来路。

二、那个共用的前提

本书要指出的是双方共用的一个前提，而且它从未被任何一方检验过：

经验，被理解成一堆被动接收的印象。

看一千个三角形、看一千次日出、看一千个白天鹅——这就是两派所说的“经验”。

在这个理解下，两派的结论都是正确的。一堆被动印象里确实长不出必然性：一千次看见太阳升起，得不到“必然升起”。所以唯理论说必然性必须另有来源，对；经验论说从印象里得不到必然性，也对。

问题在于，这不是经验。

三、路径携带必然性

请看一个具体的动作。

一个孩子把一个三角形的三个角撕下来，拼到一起，得到一条直线。再撕一个不一样的，再拼，还是一条直线。再撕一个很扁的，还是。

如果经验是被动印象，他此刻得到的是“我看过的三个都是”——一个归纳，效力等于三。

但这不是他实际得到的东西。一个走通了这条路径的孩子，会在某一刻转向另一件事：他会去问“为什么每次都拼得上”。而这个问题一旦被问出来，路就在那里——过一个顶点作对边的平行线，三个角变成同一条直线上的三个相邻角，两组内错角相等。

他此刻撞见的不是“这一千个都是”，是为什么必然是。而他撞见的方式，恰恰是做了一件事——撕、拼、作辅助线——而不是看了一千次。

于是本书的改判：

必然性不在印象里，也不在灵魂里，在路径里。

编二第七章那句被写在错误位置上的亚里士多德，在这里获得它应有的位置：图形的性质是通过实现出来才被发现的——把图形分割开，性质就显出来了；它们之所以不一目了然，是因为要靠一个动作把它们做出来。这不是抽象，这是构造；而构造与抽象最要紧的差别就在这里——抽象的效力等于样本量，构造的效力等于理由。

四、这不推翻康德，它缩小他

必须防一处过度。

本书不主张康德关于先天综合判断的整个方案是错的。本书主张的是一件更窄的事：他把一件历史产物误判为直观的先天形式（编一第四章那记非欧几何），而误判的机制是可指认的——“想象不出别的样子”被当成了先天性的证据，而那句话正是光滑化完成的标志。

那么剩下的部分呢？本书不知道，而且明说不知道。空间与时间是否是直观的形式、因果范畴是否是知性给经验立法的形式——本书没有材料，也不打算猜。

本书能主张的只有一条，而且它落在教育上：在小学与中学数学里，那些被学习者感受为“不需要理由”的东西，绝大多数是被制造出来的，而且它们的制造过程可以被指认、可以被逆转。至于这块地皮之外还有没有真正的先天形式，本书不裁决。

五、一个可测的签名

这一组改判若只到这里，它仍然是一个哲学判断。要让它进入本书的判准范围，必须给出一个可测的差别。

它有一个，而且很干净：

走通了路径的人与累积了实例的人，在面对一个从未见过的新情形时，表现不同。

累积实例的人，遇到一个新情形，会再去试一次——他不知道会不会成立，因为他的效力等于样本量。

走通路径的人，遇到一个新情形，会直接判断，并且说得有理由——因为他手里有的不是样本，是理由。

具体到那个三角形：给一个孩子看一个他从未见过的、极扁的钝角三角形，问他三个角加起来是多少。累积实例的人会说“应该也是 180 度吧”，或者要求量一量；走通路径的人会说“是 180 度”，而且如果你追问，他能说出平行线那一步。

这个差别可以被出成题，而且这类题正是编一第四章那套“分得开人”的判据的原型。一道只考显露的题（“计算这个三角形的第三个角”）两种人都能做对；一道考理由的题（“不用量，能不能确定？为什么？”）只有后者答得稳。

六、这一组对教学的直接后果

这一组改判有一个后果比前一组实得多：它说明“多练”在什么时候有效、什么时候无效。

若一个概念的必然性在路径里，那么：

- 练习可以巩固一条已经走通的路径——这是有效的，而且不可替代。
- 练习不能替代那条路径的第一次走通。一千道题不会自己长出理由；它们只会把“我看过的都是”这个效力从一千提到两千。

这解释了一件教师普遍观察到的事：有些概念多练就好了，有些概念练一万道也不好。差别不在难度，在那个概念的必然性是否已经在这个学生那里被走通过一次。

而判断办法在编三第十四章已经给过：看这个概念属于"贵"那一类还是"没有"那一类。"贵"的概念（乘法、位值）多练确实管用；"没有"的概念（分数、负数、无理数）不管用，因为那里缺的不是熟练度，是那条从未被走过的路。

七、一处对本书不利的读法

一条来自数学教育实证研究的反读，而且它直接打在本章那个"可测的签名"上。

反读是："走通了路径的人与累积了实例的人表现不同"——这个差别测不出来，因为你无法确定一个学生是哪一种。

具体地说：第五节说，给一个从未见过的极扁的钝角三角形，走通路径的人会直接判断并说出理由。但一个只是记住了"内角和总是 **180** 度"这条结论的学生，同样会直接答 **180** 度；追问理由时，他也可能背出"因为可以撕角拼直线"——这句话他听过，而且它听起来像一个理由。

能说出一句像理由的话，与真的走通过那条路径，在口头测验里分不开。

而这个困难不是技术性的。它正是编四第二十三章那张表里"过度自治"那一行：对一切追问都有现成答案却不会用，是最难识别的假会。

本书接受这个指控，并且认为它比第五节原来的说法重要。三条回应，第三条是修正。

第一，把追问加深一层可以分开一部分。不问"为什么"，问"如果这条辅助线不平行会怎样"，或者"在球面上撕角拼直线还成立吗"。前者要求他真的用过那条路径的内部结构，后者要求他知道这条路径依赖什么。背结论的学生在第二问上普遍答不出，而且他会觉得这个问题奇怪。

第二，"觉得这个问题奇怪"本身是一个读数。这与编六第三十一章那一问同源：一个走通过路径的人，知道那条路径是可以被改动的；一个只有结论的人，不觉得那里有可以被改动的东西。

第三，也是修正：第五节那个签名写得过于乐观，本节予以更正。

准确的说法不是"两种人表现不同"，是：

两种人在一级、二级题上表现相同，只在需要用到路径内部结构的题上分开；而这类题很难出，而且现行题库里几乎没有。

附录四那张四级量规里的三、四级题正是为此设的，但本书必须承认：出一道真正只有走通路径的人才能做对的题，比说明这个道理难得多。这是本书交给读者的一项未完成的工作——本书给了判据，没有给足够多的题。

八、这一章在全编里的位置

第二组改判完毕。前两组都在认识论一侧。

下一组落在教室里，而且它是四组里唯一一组每天都在影响真人的：讲授还是探究。第二十七章要论证，这一组问错得最厉害，因为它把争论放在了一个可见的变量上，而真正的变量不可见。

第二十七章 传授／探究：判据是回写，不是课堂的动静

判断卡片：这一组问错得最厉害，因为它把争论放在了一个可见的变量上——课堂的动静——而真正的变量不可见。一堂安静的讲授课，若教师把困境摆出来、把路径带学生走通、并收了改写，它是发生学；一堂热闹的探究课，若答案早已光滑地预设的教师心中、学生只是被牵着去“发现”它，它仍是发现学。判据永远是回写，不是动静。

一、这一组的实际形状

前两组在书斋里，这一组在教室里，而且它每天影响真人。

一侧是传授：教师把知识清楚地讲出来，学生接住，然后练习。另一侧是探究：让学生自己去操作、观察、猜想，把结论“发现”出来。

半个多世纪里，这一组来回摆动过好几轮。每一轮的证据都很有力：探究一侧举出被动接受的学生学过就忘、迁移不动；传授一侧举出探究课耗时、混乱、大量学生什么也没探出来，而且有严谨的实验支持——认知负荷的研究表明，对新手而言，最小指导的教学效果常常明显差于充分指导。

两侧的证据都是真的，而这本身就是一个信号。

二、发现学不等于讲授式

本书要指出的第一件事，是一个几乎所有人都在犯的等同：

发现学不等于讲授式，发生学也不等于探究式。

这是本书核心命题最容易被误读的地方，必须专门处理。

考虑所谓的“发现学习”——让学生通过操作、观察，自己“发现”出规律。表面上，它探究、它活动、它不满堂灌，似乎就是发生学。

但只要追问一句：学生要“发现”的那个规律，是被设定为本来就在那里、等着被揭开的吗？

如果是一——如果教师心里那个“正确答案”早已光滑成形，整堂课不过是让学生沿着预设的轨道，把这个早已存在的答案“再发现”一遍——那么它在本书的意义上，仍然是发现学，只是把“接收”换成了“伪发现”。学生依旧是在认领一个先在的对象，只不过认领的姿势更主动、更热闹。

由此可以画出一个谱系：发现学有两副面孔——被动接收式（满堂灌）与主动伪发现式（预设答案的探究）。二者的共同本质，是“对象先在”：那个要被接收或被发现的东西，其土壤与路径早已被磨掉，只剩光滑的显露在等着被认领。

三、那个真正的分界

发生学与这两者的分野，不在“讲还是探”，而在：

那个对象，是不是真的在这个学生这里，带着它的困境与路径，重新发生了一次，并改写了他的底盘。

于是：

- 一堂安静的讲授课，若教师把困境摆出来、把路径带学生走通、并收了改写，它是发生学。
- 一堂热闹的探究课，若答案早已光滑地预设的教师心中、学生只是被牵着去“发现”它，它仍是发现学。

判据永远是回写，不是课堂的动静。

四、为什么这一组问错得最厉害

前两组问错，代价是哲学上的僵局。这一组问错，代价是每天有真人受影响，而且原因是一个很具体的东西：

它把争论放在了一个可见的变量上，而真正的变量不可见。

课堂的动静是可见的、可拍照的、可以被评课表打分的。学生有没有在小组讨论、有没有动手操作、教师讲了多少分钟——这些全部可以被数出来。

而"这个概念在这个学生那里有没有改写了什么"是不可见的：它不在当堂表现里（当堂全对说明不了任何事），它要一周后、要换情境、要问一个"倒过来"的问题才看得见。

于是一场关于不可见变量的争论，被整个搬到了可见变量上进行。两边的改革都在调节动静：一边要求增加活动、增加小组、增加探究环节；一边要求减少活动、回归讲授、增加练习。而无论调到哪一边，那个真正的变量都可以完全不动。

这解释了那些轮回：每一轮改革都能拿出改进的证据（因为调节动静确实有一些效果），每一轮改革最后都令人失望（因为那不是主要变量）。

五、活动主义：这一组最常见的走样

有一个流行的误读必须挡住，而且它在探究一侧特别常见：把发生学等同于"活动多、课堂热闹"。

撕纸、摆小棒、分饼，若不对准困境、不收改写，照样是无效的。活动只是路径的载体，而困境与改写才是发生的两端。一堂充满活动却没有真实困境、没有改写验收的课，在本书的框架里，与一堂满堂灌的课同属失败，只是失败的样式不同。

热闹不等于发生。

这一条还有一个更隐蔽的版本，值得单独记一笔：讲一段动人的数学史，与摆一个真实的困境，是两件不同的事。前者常常只是换了一种更好听的成品——学生听得津津有味，然后照样从定义开始。编三十五章那处收窄说的正是这件事。

六、与那篇著名批评的关系

有一篇二〇〇六年的批评在这一组里分量很重，本书必须正面表态，因为本书极易被归到它的靶子里。

那篇文章论证：最小指导的教学（发现学习、问题导向、探究式）对新手无效甚至有害，因为它忽视了人类认知架构——工作记忆有限，缺乏图式的新手在无指导的搜索中会耗尽认知资源。

本书对这篇批评的立场是：如果本书被读成"让学生自己去发现新结构"，则那篇批评的每一个字都适用于本书，而本书不作抵抗。

但本书主张的次序不是那个。本书主张的是：

学生先撞到旧办法的边界，然后由教师明确地讲授新结构。

困境是被教师精心设计并摆出来的，不是让学生自己去找；路径的落脚点是教师铺好的；而结论——那个定义——由教师讲，而且要讲得清清楚楚。改变的只有一件事：它讲在什么时候。

这个立场在文献里已经有名字，第三十二章会完整交代，那里也会把这一组与本书的关系写死。这里只留一句：本书不是最小指导教学的一个变种，本书是关于讲授时机的一个主张。

七、一处对本书不利的读法

本章说“判据是回写，不是动静”。而这条判据有一个实践上的软处，必须写出来。

反读是：“看回写不看动静”这条判据，在现实中不可执行，因而它等于把这场争论悬置了。

具体地说：动静是可见的、当堂的、可以被评课表打分的；回写是不可见的、要一周后、要换情境、要出特殊的题才看得见。一位教研员一学期要听几十节课，他没有条件对每一节课做一周后的追溯。于是本书这条判据虽然正确，实际上把评价的位置腾空了——而腾空的位置会立刻被旧的判据填回去。

这个反读是对的，而且它指出了一件本书全书都在面临的事：一条正确但不可测的判据，在制度里的命运不如一条不那么正确但可测的判据。

本书的回应应有两条，第二条是一次让步。

第一，回写不是完全不可当堂看的，有两个便宜的近似。

近似一：下课前两分钟那一问。编六第三十章那条纪律说的正是它——问一个“倒过来”的问题（“学了这个，你现在怎么看那个旧的？”）。这一问当堂可做、当堂可听，一位听课者也听得见。它不能替代一周后的追溯，但它至少能把“完全没有验收”的课与“验收了”的课分开。

近似二：听学生的自发提问。编四第二十四章第七节那三组句子（“这个是谁规定的”“这跟上节课那个有关系吗”）是回写正在发生的信号；而“这个考不考”“你直接讲结论吧”是它没有发生的信号。这些句子在课堂上是听得见的，不需要任何测量工具。

第二，让步：这两个近似都很粗，而且都可以被表演。一位知道听课者在听什么的教师，可以在下课前两分钟问那一句而不管学生怎么答。任何可见的指标一旦被用于评价，就会被表演——这是编三第十三章第三节那条“同一性内卷”在评价上的形态。

本书对此没有解决办法，只能给一条方向性的建议，而且明说它是建议不是结论：

回写这类判据宜用于教师的自查与教研讨论，不宜用于考评。一旦用于考评，它会在一个学期内退化成一个新的动静指标。

这一条对本书自己是不利的，因为它意味着本书这条最重要的实践判据，在现行的制度位置上没有落脚点。编三第十八章第五节那三条成本约束（课时、师资、评价）里的第三条，在这里得到了它的完整形状：不是评价没跟上，是这类判据在原理上不适合被用作评价。

八、这一章在全编里的位置

第三组改判完毕，而且它给出了本书在实践上最有用的一条判据：看回写，不看动静。

最后一组回到本体论，但这一次是带着编四那个机制回去的。第二十八章要处理四组里最纠缠的一组，并给出一张表，说明双方为什么会换来换去而不自知。

第二十八章 实在论／建构论：两侧，以及双方换来换去而不自知

判断卡片：这一组之所以两百年不决，是因为"实在论"与"建构论"各自都可以指两件事——关于命题的真值，与关于知识如何来到一个人身上。四种组合里有两种是自治的、两种是混淆的，而争论双方大量地占据着混淆的那两格，并且在被追问时换格。本书的位置很明确：命题一侧不裁决，接收者一侧彻底发生论。

一、把两侧分开

编三第十三章第七节与编四第二十二章第五节两次立过同一道挡板。本节要把它从一道挡板变成一张表。

任何一个关于知识的立场，实际上都要同时对两个不同的问题表态：

甲问（命题一侧）：一个数学命题的真值，依赖不依赖人？

乙问（接收者一侧）：一件知识来到一个人身上，是一个接收过程，还是一个重新发生的过程？

两问互相独立。甲问的答案不能推出乙问的答案，反过来也不能。而"实在论""建构论"这两个词，在实际使用中同时被用来回答这两问，且使用者往往不说明自己在回答哪一个。

于是有四格：

	甲：真值不依赖人	甲：真值依赖人
乙：接收	格一 经典发现派	格三 混淆格
乙：重新发生	格二 本书	格四 强建构论

二、四格逐一看

格一（真值不依赖人 + 知识是被接收的）：编一那六位全在这里。立场自治，本书对它的全部异议只在"乙"那一栏，与"甲"无关。

格二（真值不依赖人 + 知识是重新发生的）：本书在这里。命题一侧接受弗雷格那条分界，不打折扣；接收者一侧彻底发生论。这一格在文献里出人意料地空——它既不满足实在论者（因为它在教学上与建构主义站在一起），也不满足建构论者（因为它拒绝把真值也交出去）。

格三（真值依赖人 + 知识是被接收的）：这一格看似古怪，但它有真实的居民——那些认为数学是人类约定的产物、因而不必追问其必然性，同时在课堂上每一章从定义开始的人。约定论加讲授法，是一种相当常见的组合，而且它内部并不融贯：如果这些东西是人约定的，为什么不能让学生看见那次约定？

格四（真值依赖人 + 知识是重新发生的）：强建构论。编二第八章的维柯是它的先祖，第十二章那条社会建构的线是它的现代形态。自治，但代价极高——它必须承担"2+2=4 在什么意义上为真"这个问题，而这个问题不好承担。

三、换格：这一组不决的真正原因

现在可以指认那件使这场争论无法收敛的事了。

争论双方大量地占据格三与格四，并且在被追问时换格。

一个典型的来回是这样的：

建构论者说"数学知识是被建构的"（听起来是格四）。实在论者反问："那 $2+2=4$ 是不是被建构的？如果我们建构成 5 呢？"建构论者答："我不是说真值，我是说我们对它

的理解与表述是被建构的"（退到格二）。实在论者于是说："那我们没有分歧"。可是下一轮，建构论者又说"科学事实是被制造出来的"（回到格四）。

反方向也一样。实在论者说"数学对象是被发现的"（格一）。建构论者反问："那为什么找到负数用了一千年，而且当时的人说它荒谬？"实在论者答："发现难不等于不存在"（守在甲栏）。建构论者说："那你承认学习者要重新建构它？"实在论者答："当然，教学当然要循序渐进"（滑进乙栏的发生论一侧，即滑进格二）。可是他的课本仍然从定义开始。

两边都在换，两边都不觉得自己在换，而且每一次换都是真诚的——因为那两个词本来就同时指两件事。

四、三个标本

本书前面各编收集的三个标本，正好各占一格，而且都能说明这个混淆的代价。

哥德尔（编一第六章）。他在甲栏是最坚定的实在论者，在乙栏也是——数学直觉如同感知。但当被追问"两位同样杰出的数学家看见了不同的东西怎么办"时，他寄望于新公理的成效来间接裁决。"看成效"是一条后验的、发生学的判据，不是直觉的判据。在最要紧的地方，最坚定的先在论者不得不借用发生论的尺子——这是格一居民向格二的一次不自觉的滑动。

维柯（编二第八章）。他从"我们造了它"（乙栏的发生论）直接推出"所以它只关于我们"（甲栏的依赖人）。这一步是把乙推给甲，而这两问互相独立，推不过去。他用一整套本可以站在格二的洞见，把自己送进了格四，并因此不能参加这场争论。

拉图尔与伍尔加（编二第十二章）。他们的机制描述完全落在乙栏（一件事实在稳定过程中失去了什么），而"社会建构"这个标签把它读成了甲栏。二十五年后他自己公开担忧这套工具被用歪——被用来否认气候变化这类有充分证据的结论。那次担忧的实质就是这一节：他做的是乙栏的工作，被人当作甲栏的结论用了。

三个标本，三个方向的滑动，而没有一位察觉自己在滑。

五、本书为什么必须待在格二

本书选择格二，不是取中间路线，是因为离了甲栏那条分界，本书立不住。

编一第五章已经写过：如果没有"命题的真"与"知识的来"这条分界，本书关于"先在感是被制造的"这个判断，会立刻滑向"数学真理是被制造的"，而后者一旦成立，本书的全部判断都会被正确地归入相对主义而作废。

一本主张"知识的到来是一个过程"的书，恰恰需要弗雷格那条线来保护它不滑进相对主义。这是本书与弗雷格的真实关系：不是对立，是他守着本书的后门。

反过来说，本书对格一居民也没有敌意。一位柏拉图主义者完全可以接受本书的全部内容——他只需承认，无论那些对象是否先在，对课堂上这个具体的孩子而言，凡是没有在他那里带着困境与路径发生过的对象，就等于不存在。教学面对的是发生，不是本体。

六、一条可以当场使用的检验

给一条便宜的检验，用来判断一场关于建构与实在的争论是否值得继续：

问双方一句：你说的是命题的真值，还是知识如何来到一个人身上？

若双方给出的答案落在同一栏，争论有实质，可以继续。

若一方在说甲、另一方在说乙，争论是空的，应当当场拆成两场。

据本书的观察，绝大多数这类争论属于后者。

七、一处对本书不利的读法

本章那张四格表是编五的收口，而它有一个明显的把柄。

反读是：这张表把两个复杂的传统压成了两个二值变量，而真实的立场分布远比这四格细。

具体地说，“甲：真值依赖不依赖人”这一栏，实际上至少要分成：真值完全独立于任何心灵／依赖于人类的语言约定但不依赖于个人／依赖于共同体的实践／依赖于个体的构造。结构主义、约定论、虚构主义、直觉主义、各种自然主义在这一栏里落点各不相同，而本表把它们一律压成“依赖／不依赖”两格。一张压缩到这个程度的表，画得出，但它裁决不了任何一场真实的争论。

本书接受这个指控，并做两处说明。

第一处说明：这张表的用途不是分类，是诊断。

它不用来给一个立场定位，它用来做第六节那一件事——当两个人在争论时，问一句他们说的是哪一侧。而做这件事只需要两格，不需要五格：只要能判断双方是不是在说同一侧，这张表就完成了它的工作。

用一个比喻：这是一把只能量“是不是同一根轴”的尺子，不是一把能量出具体位置的尺子。它粗，但它粗的方式与它的用途匹配。

第二处说明，也是一处让步：这张表对本书自己的定位可能也过于干净。

本书把自己放在格二（真值不依赖人 + 知识是重新发生的）。但严格地说，本书在甲栏其实没有立场——它只是接受弗雷格那条分界作为一道挡板，而“接受一条分界作为挡板”与“主张真值完全独立于人”不是同一件事。

准确的说法是：本书在甲栏弃权，并且要求自己的全部结论在甲栏取任何值时都成立。

而这一条恰好是本书对自己的一条检验，编六第二十九章第五节写过它的一半，这里补全：

凡本书的某条结论，若在甲栏取不同答案时成立与否不同，则那条结论偷偷用了甲栏的立场，须重写。

读者可以拿这一条去查本书任何一章。本书自查过一遍，未发现违反；但自查不算证明，这一条是交给读者的第十二个可被击中的位置。

八、这一章在全编里的位置

四组对峙改判完毕。下一节要说明这四次改判用的是同一把尺子，以及这把尺子从哪来。

编末小结：四次改判用的是同一把尺子

一、四次改判

组	原来的问法	改判
发现／发明	这个对象是被发现的还是被发明的	不含裁决信息；问句本身是那道工序的产物
先天／后天	必然性来自天赋还是来自经验	必然性在路径里；两派共用"经验 = 被动印象"这个未检验的前提
传授／探究	该讲还是该让学生自己探	判据是回写，不是动静；争论被搬到了可见变量上
实在论／建构论	知识是发现的还是建构的	两侧必须分开；双方大量占据混淆格并在被追问时换格

二、那把尺子

四次改判看起来处理的是四件不同的事，实际用的是同一把尺子，而且它可以写成一句：

一个问句若不能指定它问的是命题一侧还是接收者一侧，它就不会有答案。

逐组核一遍：

- 第一组问"这个对象从哪来"——它问的是对象，属命题一侧；而它唯一可能的证据（那种"它本来就在"的感受）来自接收者一侧。证据与问题不在同一侧，故不可裁决。
- 第二组问"必然性从哪来"——必然性属命题一侧，而"我凭什么知道它必然"属接收者一侧。两派各守一侧互相攻击，故僵持。
- 第三组问"该讲还是该探"——它把一个接收者一侧的问题（改写有没有发生）换成了一个可见的操作问题（课堂动静），连侧都换掉了。
- 第四组最直接：两个词同时指两侧，故双方可以在不改变措辞的情况下换格。

四组，同一处误置的四个面。

三、这把尺子从哪来

它不是本书为了收编这四组而临时打造的。它来自编四。

编四第二十一章证明了一件事：争论双方都带着同一条元层规则进场——这类东西总得有一个来源。这条规则不是他们论证出来的，是每天被写进去的；而它的语法要求一个主语，于是双方各自去找一个主语，一个指对象，一个指构造者。

而这条规则完全不区分两侧。它管的是"这类对象与我的底盘的关系"，它既不问真值，也不问认识论——它只规定"不必改"。一条不区分两侧的规则，塑造出的争论必然也不区分两侧。

于是本编的承重发现可以写出来：

这四组对峙不是四个未解之谜，是同一条元层规则在四个领域留下的四个印子。

四、这一编怎么派生母题

部件一（发现是发生的一个时相）：第二十五章把它落成了可判决的形式——两个立场对任何可观察的事情都不作出不同的预测，因为它们指的是同一件东西的两个时相，而不是两件不同的东西。

部件二（争论争的是一份归属错觉，且不可裁决）：这一编就是这一部件的完整证成。编一编二给了历史材料，编三编四给了机制，本编把它兑现成四组具体的改判，每一组都给出了不可裁决的确切位置。

部件三（代价在下次）：第三组是这一部件在实践上最直接的兑现。一场关于不可见变量的争论被搬到了可见变量上进行，于是无论争论谁赢，那个真正的变量都可以完全不动——半个世纪里那些来回摆动的课程改革，代价全部落在了每一批经过它们的孩子身上。

五、本编级可推翻条件

若能构造出一个可观察的场合，使得“数学对象先在”与“数学对象被造出来”这两个立场对该场合作出不同的预测（无论是关于数学实践、数学史、还是关于学习），则第二十五章“不含裁决信息”的判断被推翻，第一组恢复为一个实质问题。

本书作者已尽力寻找而未找到。最接近的候选是直觉主义（编二第九章），因为它确实改变了什么算合法证明；但那是一个关于逻辑规则的分歧，不是关于对象出身的分歧——一个人可以是柏拉图主义者兼直觉主义者，也可以反过来，两种组合在历史上都有实例。

六、留给编六的

四组改判做完，问句就空出来了。本书拆掉了一个提了两千五百年的问句，就有义务给出替换它的那个。

编六要给的是：不问归属，问工序。而这个更换有它自己的代价，第二十九章第一件事就是把代价说清楚。

编六 出路：不问归属，问工序

编五拆掉了一个提了两千五百年的问句。拆掉一个问句的人，有义务给出替换它的那个。

本编给的替换是：不问这件东西从哪来，问这件东西是以什么形状被交出去的，以及交出去的时候接收者身上发生了什么。

这个更换有代价，第二十九章第一件事就是把代价说清楚。此后五章是工序：还原（第三十章）、解锁（第三十一章）、案例与立场（第三十二章）、检验（第三十三章）、边界与自我推翻（第三十四章）。

第二十九章 问句的更换，及其代价

判断卡片：换问句是一件有代价的事，而编二第十二章那位付过一次——他为了换问句离开了被描述的学科，于是新问句在原学科内部等于不存在。本书的第一条纪律由此而来：全部论证在数学与数学教育内部进行，用数学的例子、教学的例子、可以在教室里被核对的判据。方向不等于发动机；换了问句而不给工序，等于什么也没换。

一、新问句是什么

旧问句：这个数学对象是被发现的，还是被发明的？

新问句有两句，而且必须两句都在：

其一：这件东西是以什么形状被交出去的？

其二：交出去的时候，接收者身上发生了什么？

第一句是编三的工作（工序的解剖），第二句是编四的工作（封写）。两句缺一不可：只问第一句，就成了编二第十二章那条线——描述得很好，推不出任何处方；只问第二句而不管形状，就成了一般的学习心理学，与本书的题目无关。

二、第一项代价：换问句常常要换学科

编二第十二章记过这笔账，这里要把它变成本书自己的纪律。

那两位是本编唯一真正换了问句的先行者，而他们为此离开了被描述的学科：《实验室生活》是一本人类学著作，它的读者是社会学家，不是神经内分泌学家；那间实验室里的科学家读到它时，大体上是被冒犯。此后二十年这条线越走越远，最终撞上了那场公开冲突，把整个领域的公信力打掉了一大截。

结果是一个尴尬的局面：一套关于科学如何运作的、相当准确的描述，被它所描述的对象整体拒收。

由此得到本书的第一条纪律，而且它决定了全书的材料选择：

本书全部论证在数学与数学教育内部进行。

用数学的例子（编三第十四章那九个）、教学的例子（第三十二章那七个）、可以在教室里被核对的判据（定义在第几段、一周后的回写题、第三十三章那张量表）。本书不打算成为一本关于数学的社会学著作，也不打算发明一套新的元语言。

这条纪律是有成本的：它使本书不能使用大量现成的、相当有力的社会学与科学论工具。本书接受这个成本，理由是编二第十二章那次记录。

三、第二项代价：新问句放弃了一些人想要的东西

必须诚实地说明，换问句之后有一些东西是拿不到的。

拿不到“数学对象究竟是什么”的答案。一位真心想知道 π 在人类出现之前是否存在的读者，读完本书仍然不知道，而且本书论证了这个问题不含裁决信息——这对他不是一个答案，是一次拒绝。本书承认这是一次损失。

拿不到一套关于数学创造的方法。本书讲的是一件已经造好的东西如何在一个新的人那里重新长出来，不讲怎么造出一件新东西。这两件事在编三第十三章第九节已经分过：前者是接收端，后者是生产端。一位想学“怎么做出新数学”的读者，本书帮不上忙。

拿不到一个立场。本书不属于任何一派，这对希望获得一个可以持有的立场的读者是不满足的。

四、第三项代价，也是最要紧的一项：方向不等于发动机

有一个错误在换问句之后特别容易发生，而且它有一个可以指认的形状：

方向可以纠正错误，但不能自动产生工艺；工艺可以生成结果，但若没有方向，工艺可能仍在服务旧的错置。

一个换了问句的人，很容易停在换问句这件事上，把新问句本身当成成果。于是产出的是一批宣言：应当关注过程而非结果、应当重视生成而非确认、应当从困境出发而非从定义出发。

这些话全部是对的，而且全部不能被执行。一位读完这些话的教师，明天早上站在教室里，仍然不知道该做什么。

本书对此的态度是纪律性的：从第三十章起，本编只写可以被执行、可以被检查、可以失败的东西。一道工序若不能说出它在什么情况下无效，它就还没有写完。

这一条对本书自己是一把刀。编三第十六章已经把它接住了：本书若成功，最可能的结局就是被抽掉困境与路径，压成一张贴在办公室墙上的表——三步还原、五步环、解锁三问。而识别码也在那里给过：看到有人在用本书的工序，却说不出它在什么情况下无效，那份东西已经不是本书了。

五、新问句能拿到什么

代价说完，说收益，而且只说本书认为真正到手的。

其一，一个可数的诊断。定义在第几段（编三第十五章）；一周后的回写题正确率（编十一第四章）；先在感指数（第三十三章）。三个都不需要接受本书的任何理论就能测。

其二，一份对“补不动”的解释。那些无论换多少教法、补多少次课都补不动的概念，此前只能归因给学生或教师；封写给了第三种解释，而且这第三种解释带着一道处方（第三十一章）。

其三，一个可以被推翻的机制。第三十三章那三个实验，以及三条撤稿级条件。这是本书与它所批评的那两派最大的差别：那两派各自的立场在原理上不可能被经验推翻，本书的可以。

六、一处对本书不利的读法

本章立了一条纪律（全部论证在数学与数学教育内部），而这条纪律本身可以被反过来打。

反读是：这条纪律是一次自我保护，不是一次方法论选择。

具体地说：把论证限制在数学与数学教育内部，好处是本书不必面对社会学、科学论、认知科学各自的检验标准；而代价是本书的核心概念（封写、元层回写）恰恰是心理学与学习科学的概念，却拒绝接受那两个领域的方法论要求。一个提出“接收者身上有一条元层规则”的主张，本来应当用认知科学的办法去做——被试量、控制、效应量、可复制性；而本书用的是课堂观察与概念分析，然后用“我只在数学教育内部工作”来解释为什么不必那样做。

这个指控是对的，而且它是本书这一编收到的最不客气的一条。

本书接受它，并且必须把那条纪律的范围收窄，否则它确实变成了一块挡箭牌。

准确的说法是：

那条纪律限制的是本书的材料来源与例证范围，不限制对本书的检验标准。

也就是说：本书可以只用数学的例子（这是选材），但凡是本书提出的经验主张，都必须接受提出它的那个领域的检验标准（这是举证责任）。封写是一个心理学主张，那么它就得按心理学的规矩来——而这正是编六第三十三章那三个实验存在的理由：被试、分层、随机分派、预注册、效应量门槛、撤稿条件。

于是这条纪律的实际内容变成两句，而不是一句：

材料只取数学与数学教育（避免编二第十二章那次覆辙）。

检验按各主张所属领域的标准（不得用前一句豁免后一句）。

这一处修正是必要的，因为原来那条纪律的措辞里，确实藏着一个可以用来推掉举证责任的口子。而按本编第四节自己立的那条——一道工序若不能说出它在什么情况下无效，它就还没有写完——这个口子必须当场堵上。

七、这一章在全编里的位置

问句换好了，代价交代了，纪律立了。

接下来五章是工序。第三十章从最基本的那一道开始：把被磨掉的东西还回去。而在写它之前必须先说一句——这一道不是本书的发明，它是编二第十一章那位的做法被写成教案；本书的新东西在第三十一章。

第三十章 去光滑化：三还原与发生五步

判断卡片：去光滑化是光滑化的逆运算，三个还原动作与编三第十三章那三个操作——对消。但它有一条容易被忽略的纪律：还给学习者的不是历史那条路径，是他自己走得通的那条粗糙路径——困境常可原样还回去，路径几乎总要重铺。这一条是本书与复演说的分界线。

一、逆运算

编三第十三章给了三个操作：磨掉土壤、磨掉路径、把显露摆为起点。

去光滑化就是三个——对消的还原：

还原一：把被删掉的困境找回来，重新摆到学习者面前。

还原二：把被删掉的路径重新走一遍，且必须让学习者亲自走——教师替他走完，等于没有还原。

还原三：不再把显露当起点——把定义从"起点"挪回"结算点"，让它在路径跑通之后自然结晶。

三个还原——对消三个操作。发生学教学法在结构上，就是发现学的逆运算。

请注意第三个还原说的不是取消定义。定义还在，而且必须讲清楚；它只是被挪回了它在发生链中本来的位置：最后，而不是最先。编三第十九章挡住的第一个误读，说的正是这件事。

二、发生五步

三个还原落到一节课上，是一个五步的环，而它恰好是发生链的顺序：

- ① 开困境。抛出一个学习者现有工具解决不了的真实问题。
- ② 立框架。递出解决它所需的新显露的雏形——是给方向，不是给定义。
- ③ 走张力。让学习者在这条路径上亲自跑一遍。这一跑，概念才在他身上发生。
- ④ 落实例。换几个真实情境，让它再发生一次。例子在这里不是"最后拿来练"的应用，而是发生的一部分。
- ⑤ 开新困境。用一个新问题开出下一环。

第五步接回第一步——所以是环，不是线。一堂发生学的好课，不是"讲完了"，而是"又打开了一个口子"。

这个"环"的性质对教学节奏有一个不易察觉的影响。发现学的课以"讲完、练完"为完成态，它在心理上是闭合的；发生学的课以"又开了一个新困境"为完成态，它在心理上是敞开的。一学期下来，前者积累的是一叠彼此独立、各自闭合的知识点；后者积累的是一条首尾相衔的问题链。前者是一堆砖，后者是一条路。

三、必须还的与必须重铺的

这里是本章最要紧的一条，而且它是本书与一个著名错误的分界线。

从"发现的次序不是呈现的次序"（编三第十六章那三份自供），很容易推出"那就按发现的次序来教"。这一步不成立，而且它在教育史上有一个名字——复演说，主张个体学习应当重演学科的历史发展次序。

本书明确不主张它，理由有三：

其一，历史的路径常常是错的路径。负数被抗拒了几百年，其中大部分时间人们在做的是徒劳的辩护与回避。让一个孩子重走这几百年，是浪费。

其二，历史的路径的落脚点，是为当时的人准备的。欧多克索斯的比例论假定读者手里有一整套几何作图的经验；今天的孩子没有那套经验，却有另一套（小数、计算器、数轴）。同一个落脚点，对不同底盘的人高矮完全不同。

其三，也是最直接的：编第三十六章那位的十五天失败，对他是必要的，对一个学生不是。他那十五天是在探索一个无人走过的空间；学生要走的是一条已知通向何处的路，只是他自己还没走过。两件事在认知上完全不同。

于是本书的分界写成一句：

困境常常可以原样还给学习者，路径几乎总要重铺。

困境可以原样还，是因为它往往是跨时代稳定的：“整数不够分”这件事，两千年前和今天是同一件事；“三饼分四人”今天的孩子照样卡住。

路径必须重铺，是因为路径的落脚点必须按这个学习者现有的底盘来定，而不是按历史上那批人的底盘。

四、困境有两类，摆法不同

编第十四章那条区分在这里第一次派上用场，而且它是备课时最实用的一条。

“贵”类困境（旧办法做得出来，但代价不可接受）：乘法、位值、简便运算。摆法是让学生累——真的让他把“五个三”一个一个加，真的让他用一个一个的符号去记一个很大的数，写到手酸。累是这一类困境的生理形式。这一类最容易被教师跳过，因为看起来是浪费时间；而跳过它，后面那个省力工具就没有了挂靠。

“没有”类困境（旧办法根本给不出对象）：分数、负数、无理数。摆法是让学生卡住——让他真的答不出来，并且停在那里，不急着救。“三个饼平分给四个人，每人多少”，让他用整数去够，够不着。卡住是这一类困境的形式。

用错了，困境就摆不成。对一个“没有”类的概念让学生“累”（多算几遍），他不会卡住，只会觉得烦；对一个“贵”类的概念让学生“卡”，他会莫名其妙，因为他明明做得出来。

五、三条纪律与四个陷阱

守住三条，就不会滑回发现学：

其一，一节课只对准一道具体的困境。贪多则困境模糊，什么也发生不了。

其二，先制造困境，再给工具。顺序一旦反过来（先给定义），无论后面多热闹，本质已是发现学——编五第二十七章那条判据。

其三，下课前留两分钟验一次改写，问一个“倒过来”的问题。

四个看着像发生学、其实不是的走样：

伪困境：其实不缺，学生早会，你还假装制造问题。

替学生跑路径：工具给了，却是教师一路演示到底。

活动代替发生：热热闹闹撕了摆了，最后没有结算、没有命名。

漏改写：讲完就下课，从不问“你对旧东西的看法变了吗”。

这四个陷阱，恰好对应五步里最容易塌陷的四处；掉进任何一个，就等于把课又光滑化了回去。

六、一个易犯的错：还原不等于放录像

去光滑化最容易被做走样的地方，是把它误解成"给学生看一段发生的录像"。教师精心演示一遍完整的发生过程——困境、路径、显露一应俱全——然后放给全班看。

这看起来还原了困境和路径，实则不然：看别人走过一遍，不是自己走过一遍。一段被完整演示的发生，对旁观的学生而言，本身又是一个光滑的成品——只不过从"光滑的定义"换成了"光滑的过程录像"。

编二第十一章记过这条纪律的历史来源：那位把两百年的搏斗档案逐条捡了回来，然后把它们磨成了一本极精彩的书。他假定只要把搏斗摆出来，读者就接得住。

由此得到一条硬纪律：发生可以复现，但"在这个学习者这里发生"不可代办。教师的活儿，不是把路走给学生看，而是把路铺得足够粗糙、足够有落脚点，然后忍住不替他走。

七、一处对本书不利的读法

本章那五步环最容易招来一条反读，而且它来自实际带过课的人。

反读是：五步环在真实的课堂上跑不完。

具体地：一节课四十分钟，班上四十多人，学生的底盘参差极大。摆一个真困境要五到十分钟；让全班每个人都亲自跑一遍路径，快的五分钟做完在那里等，慢的二十分钟还没进去；等到结算，铃响了。而下一节课有下一节课的内容。

更麻烦的是第三步："让学习者在这条路径上亲自跑一遍"——这在四十人的班里几乎不可能对每个人成立。实际发生的通常是：五六个学生真的在跑，十几个在模仿他们，其余的在等答案。而那五六个学生，多半是本来就不需要这堂课的那几个。

这个反读击中的是本书全书最薄的一处：它的全部工序是以个体为单位设计的，而教学是以班级为单位发生的。

本书接受这一条，并给三条部分回应，第三条是让步。

第一，五步不必都在一节课里。困境可以在前一节课的末尾抛出，让它挂一晚上；路径可以分在两节课；结算可以放到第二节课的开头。本书把它写成"环"而不是"一节课的流程"，正是为此，而第二节的措辞给了误导（"落到一节课上"），本节予以更正。

第二，那个"每个人亲自跑"的要求可以退一格，但不能退两格。不可代办的是撞上困境那一下，不是整条路径。一个学生若真的在某一时刻感到"我这个办法不够用"，那一下必须是他自己的；而后面的路径，看同伴走、听教师讲、跟着做，都还有效。编三第十六章那条"还原不等于放录像"针对的是全程旁观，不是每一步都必须独立完成。

这个退让把成本降下来了：要保证的是全班每个人都撞上那个困境，而不是全班每个人都独立走通那条路径。而"让全班都撞上困境"是可以设计的——一道所有人都做得起、而且所有人都会卡在同一处的题。

第三，让步：即使退到这一格，本书也没有处理"班里学生底盘参差"这件事。一个困境对某些学生是真的，对另一些是伪的（他们早会了），对再一些是过难的（他们连启动都不行）。编六第三十二章第四节引的那三个必要条件里，第一条"任务在学习者能力的边缘"，在一个四十人的班里是四十个不同的边缘。

本书没有解决它，也不假装有。这是本编第三笔欠账（编六编末第三节）之外的第四笔，本节把它记上。

八、这一章不是本书的新东西

必须写在明处：本章全部内容都不是本书的发明。

三个还原是编三第十三章那三个操作的镜像；五步环与既有的教学设计模型（如那个广为人知的五阶段模型）形状相近；"有指导的再创造"这个主张编一导论第五节就指认了它的作者；把每个数学结构追问回"当初组织了哪些现象"，那是编三第十六章提到的那本一九八三年的书的做法。

本书在这一章里唯一做的事，是把它们排成一个可以照着上课的次序，并给了两类困境的摆法区分。

本书的新东西在下一章。而下一章之所以是新的，是因为它对应的病灶（封写）此前没有被指认过——一道处方的新旧，取决于它对准的病灶的新旧。

第三十一章 元层解锁：五步环之前的那一道工序

判断卡片：被封写的学习者，挡在门外的不是困境、不是路径，而是一条关于改写权的规则；对他，五步环会照跑不误、也照样落空。解锁的目标只有一个——让他亲历一次“这个对象本可以不是这样”。注意是亲历，不是听说：用一条现成的元命题去纠正另一条现成的元命题，不过是在同一层上换了张纸。

一、为什么五步环不够

第三十章那道工序，对一个改写权还开着的学习者是够用的。

对一个被封写的学习者，它会照跑不误、也照样落空。他会礼貌地分饼、认真地折纸，全程配合，然后抬头问一句编三第十五章记过的那句话：“老师，你直接讲结论吧。”

编四第二十三章第六节把这种失败命名为第三种：课去光滑化得很好，困境摆出来了，路径学生也亲自走通了——改写照样不发生，因为通道是封的。

所以在五步环之前，需要一道原本不在教学法里的前置工序。

二、解锁的目标，与一个必须避免的做法

目标只有一句：

让学习者亲历一次“这个对象本可以不是这样”。

注意是亲历，不是听说。

听教师说“数学是人造出来的”不解锁。这句话本身又是一个被端出来的光滑成品——用一条现成的元命题去纠正另一条现成的元命题，不过是在同一层上换了张纸。学生会把它当作又一条要记的知识收下，而这次收下再一次确认了那三款规则：它来了，它是现成的，收下它我什么也不用改。

讲一段动人的数学史，多数情况下也不解锁。编五第二十七章那条已经说过：好听的故事仍然是成品。学生听得津津有味，然后照样从定义开始。差别的判据很简单——他有没有自己站在那个岔路口上？

三、解锁三问

落到课堂，是三个可以在五到十分钟内做完的动作。

其一：如果不这样，会怎样？

拿一条学生最不假思索的规定，让他试着改掉它，然后自己去撞后果。

例：我们规定“零不能作除数”——那我们偏要让它作一次，看看会出什么事。让学生自己去定 $6 \div 0$ 该等于几。有人说 0，有人说 6，有人说无穷大。然后一个一个试：若 $6 \div 0 = 0$ ，那么 0×0 该等于 6，可是 $0 \times 0 = 0$ ；若 $6 \div 0 = 2$ ，那么 $2 \times 0 = 6$ ，还是不行。学生会撞见“等于几都说得通、也都不通”这个真实的坍塌。

这一问的作用：那条规定第一次显出了它的理由，而不是它的权威。

其二：当年差一点就选了别的。

给一个真实的历史岔路，而且要给那条没被选中的路留足体面。

例：十二进制在很长时间里是有力的竞争者——一打是十二，一英尺十二英寸，钟面十二格；十二能被 2、3、4、6 整除，十只能被 2 和 5 整除。若当初选了它，“满十进一”就是“满十二进一”，九九表要背到十一十一。

关键在措辞。不能说“人们最后选对了”——那样又回到“本来就该这样”。要说的是：“人们选了一条，另一条也走得通，而且在某些方面更好用。”

这一问最能松动第一款（对象先在）。

其三：你能不能造一个？

给一个真的困境，让学生自己命名一次。

例：我们只有整数，现在要记“半个”，你想怎么写？学生会造出各种记法——画半个圆、写“一半”、写 $1|2$ 、写 2 分之 1 的各种变体。让几种记法在黑板上并排站着，包括课本上那一种，一起比一比。

当学生看见自己造的记法和课本上那个记法站在同一排、被同一套标准评比时，第二款就出现了第一道裂缝：原来这类东西不是从天上掉下来的，是有人在某个需要里做出来的，而做的人本可以做成别的样子。

四、一处最容易走样的地方

第三问最容易滑出去，而且滑出去的后果比封写更糟。

学生造出五种记法之后，若课到此为止，他学到的可能是“怎么写都行”。这是相对主义在课堂上的初级形态，而编三第十三章第七节与编四第二十二章第五节两次立的挡板，正是要挡它。

必须走完最后一步：让几种记法在同一个任务上比一比。

用它算一算 $1/2$ 加 $1/2$ 试试。画半个圆的那种画不动；写“一半”的那种加不起来；而分子分母那种，两个 $1/2$ 拼成一个整的，一眼就看得出。学生亲眼看见有的记法算得动、有的算不动。

于是那句必须被说出来的话：

本可以是别的样子，不等于怎样都一样。

约束是真的，只不过约束来自要解决的问题，而不是来自权威。这一步走完，解锁才算落地；漏掉它，解锁会变成一次相对主义的灌输，比封写更糟——封写至少还让学生手里有一件能用的工具。

五、解锁与去光滑化的分工

两者处理的不是同一件事，必须分清：

去光滑化处理的是“这一个概念”（把它的困境与路径还回来）。

元层解锁处理的是“这一类东西”（松动“数学对象不必改动我”这条规则）。

前者一课一个，后者一学期几次即可——解锁不必对每个概念都做一遍，它改的是底盘上的规则，一旦松动，后续的去光滑化才吃得住劲。

这个分工有一个直接的实际后果：解锁很便宜。一学期三到四次、每次十分钟，不占多少课时，而且它可以放在任何一个方便的位置，不必与当天的教学内容绑定。编三第十八章那三条成本约束（课时、师资、评价），解锁这一道基本不触及。

六、什么时候需要解锁

不是每节课都要，判据就是编四第二十三章那一问：

拿本节要教的概念问一句：“它本可以不是这样吗？”

若班上多数学生答不出、或者觉得这个问题没有意义，这节课就应当先解锁再上。

经验上：低年级往往不必——封写还没有加固到那个程度；高年级、以及那些“补了很多次仍然补不动”的概念，几乎一定要。这与编四第二十三章那条“活化能随学升高”是同一件事的两个说法。

七、这一章是本书的新东西

第三十章末尾说过，那一章不是本书的发明。本章是。

而它之所以是新的，不是因为这三个动作没人做过——好教师一直在零星地做这类事，尤其是第二问。它之所以是新的，是因为它对准的病灶此前没有被指认过，因而它此前没有位置。

在既有的教学法框架里，这三个动作会被归入“激发兴趣”“数学文化”“开阔视野”——都是好东西，但都是可选的装饰。而在本书的框架里，它们是必要的前置：对一个被封写的学习者，不做这一道，后面全部无效。

同一个动作，从装饰变成前置，靠的是病灶被指认。这也是本书对“什么算一个新处方”的回答：一道处方的新旧，取决于它对准的病灶的新旧。

八、一处对本书不利的读法

本章是本书唯一的新工序，因此它要承受最重的一条反读，而这条反读来自本书自己的机制。

反读是：解锁三问，本身可能也是被光滑化地端出去的。

具体地说：一位教师读完本章，明天带着三个问题走进教室——“如果不这样会怎样”“当年差一点选了别的”“你能不能造一个”。这三个问题此刻是什么？它们是三个现成的、可执行的、不需要教师自己想明白任何事的操作。

而按本书自己的机制，一件被现成端出去的东西，接收者收下它时不需要改变任何东西。于是那位教师会把这三问当作三个新的教学技巧收下——就像收下“小组讨论”“情境导入”一样——而他自己关于“数学对象有没有来路”的那条元层规则，一动未动。

结果是：一位自己被封装着的教师，用三个解锁问题去给学生解锁。

这个反读是本书全书最锋利的一处自指，本书没有能力完全化解它，只能给三条。

第一，这个失败是可观察的，而且有一个具体的样子。一位自己没有松动的教师问“如果当初不这样规定会怎样”，会在学生给出一个出乎意料的答案时，急着把它收回来——“好，我们还是回到课本上的写法”。急着收回，就是他自己那条规则在起作用。而一位自己松动过的教师，会对那个意外的回答真的感兴趣，因为他知道那里确实有东西。

这个差别在课堂上看得见，而且学生比听课者更早看得出来。

第二，本章第四节那处收尾，是防这条反读的部分设计。那一步（让几种记法在同一个任务上比一比）要求教师当场处理一批他没有预设过的学生答案——如果他只是在执行一个技巧，他会在这一步卡住，因为这一步没有标准答案可背。这一步因此同时是解锁的最后一步，和对教师的一次筛选。

第三，让步：本书没有为教师设计对应的工序。编六第三十四章第四节把师资列为三处未竟之一，而本节把它说得更具体：

教师需要的不是这三问，是他自己先经历一次“这个对象本可以不是这样”。

而那一次经历，无法由读一本书完成——包括读这一本。

本书能做的，至多是本章第二节那句话：听教师说“数学是人造出来的”不解锁。这句话对学生成立，对教师同样成立。一位读完本书就觉得自己已经明白了的读者，很可能正是这句话的又一个例证。

九、这一章在全编里的位置

工序给完了。下一章给案例，并且处理那个从第一页起就悬着的立场问题：本书为什么不反对讲授。

第三十二章 七个案例；以及本书为什么不反对讲授

判断卡片：七个小学核心概念，同一个动作的七次执行——先找到那条走不通的旧路，让新对象作为“让它走通的工具”发生出来，最后验一次改写。而本章后半必须处理那个从第一页起就悬着的立场：本书不是最小指导教学的变种。本书主张的次序是学习者先撞到旧办法的边界，然后由教师明确地讲授新结构；改变的只有一件事——它讲在什么时候。

一、七个案例

每个案例四段：困境 → 路径 → 显露 → 改写。请特别留意每个案例的最后一段，它是发生是否完成的判据。

一、数。困境：这两堆东西，哪堆多？——一眼看不出来，需要一个办法。路径：一一对应，一个对一个地摆，看谁先摆完；对不清，才需要一个能“记住多少”的东西。显露：“数”发生了一—5 就是和五根手指能一一对应的那一类聚集的共同名字。改写：从此看任何一堆东西，都会想“它能和几对上”。数不再是黑板上的符号，而是他亲手用“对应”量出来的东西。

这一案例揭示了数的发生学原点：对应先于计数。发现学从符号起步，正是把这条来路磨掉了。

二、加法与交换律。困境：这两堆合起来，一共多少？路径：把两堆并到一起，重新数一遍。显露：“+”就是这条“合并再数”的路径，“=”是它的结算点。改写：学生亲自试出“先合谁、后合谁，总数不变”——交换律不是背的，是他自己撞见的一个事实。

三、位值。困境：数变大了，一个一个数太慢，符号也不够用。（这是“贵”类困境，摆法是让他累。）路径：十根小棒捆成一捆——这个“捆”的动作生出一个新单位。显露：“十”作为一个新单位发生了。改写：11 里，左边的 1 是“一捆（十）”，右边的 1 是“一根（一）”，它们不一样大。

捆小棒是常见活动，但重点从来不是活动本身，而是让“捆”这个动作生出新单位。若只捆不悟，活动就退化为无效的热闹。

四、乘法。困境：“五个三相加”写起来烦、算起来慢。（也是“贵”类。）路径：把“几个几”打包成一个整体。显露：乘法 = 重复相加的打包。改写：再看加法，会分辨“零散地加”和“成倍地加”是两种事。口诀不再是要背的天书，是他亲手打包出来的省力工具。先有意义，再背才牢。

五、分数——最硬的一课。困境：三个饼平分给四个人，每人多少？整数答不出来。（“没有”类，摆法是让他卡住。）路径：真的去平分，给“每人分到的那一份”命名。显露：分数发生了，为让“平分”能结算； $1/2$ 的同一性 = 两个它拼成 1。改写：看“整数”从此知道——它只是数的一段，中间还挤着无数个数。

$1/3 > 1/2$ 的错误不会再犯，因为他亲手分过，知道分的份越多、每份越小。这一案例是本书核心命题最清晰的一次现身。

六、等号——破一个大误解。困境：同一个数 6，可以从很多条路走到—— $2+4$ 、 $1+5$ 、 $3+3$ 。路径：让学生写出 $6=2+4=1+5=3+3$ ，把两边都摆出来、互相印证。显露：“=”是“两边是同一个东西”的关系符——像天平，不是箭头。改写：等号从“得”变成“平衡”，学生开始接受 $8=3+5$ ，也接受 $3+5=2+6$ 。

把等号当箭头，是小学最普遍、最隐蔽的一处误解，会一路拖累到中学的方程学习。而这一小步的改写，替中学扫清了一个大障碍。

七、三角形内角和。困境：各种三角形长得差那么多，三个角的和会一样吗？路径：把三个角撕下来拼到一起；再量一量、多试几个；再问“为什么每次都拼得上”。显露：三个角拼成一条直线—— 180° 。改写：结论有了来路。而更重要的改写发生在一个更大的信念上——数学结论有来路、可验证，这一信念将支撑他此后全部的数学学习。

二、七个案例的共同结构

抽掉具体内容，七个是同一个动作：

先找到那条走不通的旧路（困境），让新对象作为“让它走通的工具”发生出来（路径→显露），最后验一次改写。

教师一旦握住这个通用动作，就能自己造出第八、第九个案例。

而它还给了一个诊断入口：当某个概念反复教不好时，不必慌乱地归因于“学生笨”或“练得少”，可以顺着这四段逐一排查——是困境没摆出来？是路径没让学生亲自走（教师替他走了）？是显露教残了（只给了符号、没给量）？还是压根漏了改写？四段之中，总有一段塌了。

而若四段都没塌、仍然无效——那就是编四第二十三章那第三种失败，要回到第三十一章去解锁。

三、本书为什么不反对讲授

现在处理那个从导论第七节起就悬着的立场，而且要处理干净，因为这是本书最容易也最有害的一处误读。

若本书被读成“让学生自己去发现新结构”，则那篇二〇〇六年的著名批评的每一个字都适用于本书，而本书不作抵抗。那篇文章论证：最小指导的教学对新手无效甚至有害，因为工作记忆有限，缺乏图式的新手在无指导的搜索中会耗尽认知资源。这个论证是对的，而且它有大量实验支持。

但本书主张的次序不是那个。本书主张的是：

学生先撞到旧办法的边界，然后由教师明确地讲授新结构。

请看这一句里每个部件由谁负责：

- 困境：由教师精心设计并摆出来。不是让学生自己去找一个困境——那才是最小指导。
- 路径的落脚点：由教师铺好，铺得足够粗糙、足够有落脚点。
- 走这条路的脚：是学生的。这是唯一不能代办的一件事。
- 结论、定义、名称：由教师讲，而且要讲得清清楚楚，不含糊、不留白、不搞“你们猜猜看”。

改变的只有一件事：它讲在什么时候。从第一段挪到第五步。

四、这个立场在文献里已有名字

本书在这一点上不是首创，而且必须说清楚，否则会显得本书在偷偷回避那篇批评。

这个立场在文献里有两个现成的名字：有效失败（productive failure）与《适合讲授的时机》（A Time for Telling）。前者的研究表明，让学生先在一个超出其现有能力的问题上尝试并失败，然后跟以明确的讲授，其效果优于直接讲授；后者的实验给出了同一形状的结果。

而前一条线的研究者还给出了一个极重要的区分：有效的失败与无效的失败不同，有效失败需要三个必要条件——

其一，任务在学习者能力的边缘（太难则崩溃，太易则不构成困境）；

其二，学习者有可调用的先验知识（否则他连试都试不起来）；

其三，后面必须跟着明确的讲授（缺了这一条，失败就只是失败）。

这三条本书完整继承，并把它们当作第三十章那五步环的边界条件。尤其第三条：五步环的第②步"立框架"与结论的明确讲授，不是可选的，是必要的。

五、本书在这条线上加了什么

既然这个立场已有名字，本书在这里的增量必须说清，否则第三十章与本章就只是复述。

其一，第三十章那条"困境两类"的区分（贵／没有，及对应的摆法：让他累／让他卡住），据本书所知未被写成过一条备课判据。

其二，也是主要的一处：解锁这道前置工序。有效失败那条线假定，只要任务设计得当，学生会去试。本书指出存在一类学生，他不会去试——不是因为任务不合适，是因为他不认为一个数学对象会有"路"这回事。对他，那三个必要条件全部满足也无效。第三十一章那道工序，处理的正是这一类。

其三，本书明确不提供东西：本书不提供新的实证结果。第三十章那五步环的有效性，靠的是有效失败那条线已有的证据；本书自己要负责证明的只有封写与解锁那一部分，而它的证明在第三十三章，尚未执行。

六、四类应当直接讲的东西

最后给一份清单，防止读者回去把讲授全砍掉。以下四类应当直接讲，不必也不该去还原：

约定类：记号、命名、书写格式、术语。这些本来就是约定，没有困境可摆，直接讲，讲清楚为止。

安全类：任何涉及安全的规程。

名字类：一个已经被学生走通的东西叫什么名字。名字要在结算点上给，而且要痛快地给。

脚手架类：为了让学生能走下一步而临时提供的工具或事实，本身不是这节课的目标。

这四类加起来，占一节课的时间可能超过一半。本书要动的只是那少数几个"反复教不好"的概念，不是整个课堂。编三第十八章那三条判据，说的正是这件事。

七、一处对本书不利的读法

本章七个案例是全书最容易被直接采用的部分，因此必须给出它们最可能的失败方式。

反读是：这七个案例是从结论倒推出来的，而不是从课堂里长出来的。

具体地说：每个案例都是"困境→路径→显露→改写"四段整齐排列，四段之间严丝合缝，每一段都恰好支持本书的框架。而真实的课堂不是这样的——学生会在你没预料的地方卡住，会给出与四段无关的答案，会在第三段还没走完时突然跳到第四段，也会在你以为发生了改写时其实只是记住了你想听的话。

一套在纸上四段整齐的案例，恰恰是它没有被真实课堂修改过的证据。

这个指控本书接受，而且它比表面上更重，因为它是本书自己那把刀的一次回击：编第二十一章批评拉卡托斯"把土壤和路径捡回来之后又把它们磨光了"——而本章这七个案

例，正是同一种磨光。它们是被整理过的、干净的、去掉了所有毛刺的教学过程，也就是编六第三十章第六节明令禁止的那种"光滑的过程录像"。

本书的回应有两条，都是让步。

第一，这七个案例应当被当作模板，不应当被当作实录。本章第二节那句"教师一旦握住这个通用动作，就能自己造出第八、第九个案例"，说的正是它们的正确用法：取那个四段结构，不取那些具体的话。而本书没有把这一点写在案例的开头，导致最容易被抄走的正是那些具体的话。本节把这句话补在这里，并建议读者在使用附录二那张表时，只取它的框架列，不取它的措辞。

第二，本书没有一份真实的课堂实录来对照这七个案例。编四那五节课堂实录是本书能拿出的全部现场材料，而它们记的是失败，不是成功——本书有失败的实录，没有成功的实录。

这一处的欠缺是结构性的：本书全部工序尚未在任何一间教室里被系统地跑过（编六第三十三章那三个实验尚未执行）。于是这七个案例目前的地位，是从机制推出来的设计，不是从实践里提炼的经验。

本书把它写在明处，是为了让读者知道自己在拿什么：一份有理由的设计，不是一份被验证过的教案。

八、这一章在全编里的位置

案例与立场都交代完了。但到这里为止，本书的全部主张——尤其编四那个机制——仍然只有概念论证与课堂观察，没有一份数据。

下一章要把它交出去。

第三十三章 三个预注册实验，与三条撤稿级条件

判断卡片：封写假说与本书其余部分性质不同——它做出方向明确、且明显可能为假的预测，因而必须把检验条件当场写死，否则它会退化成一个永远正确的说法：凡是补救无效的，都可以事后宣布“那是被封写了”。本章给出读数、三个实验、以及在什么结果之下本书的编四必须删掉。

一、为什么这一章不能省

本书其余部分以概念分析、历史材料与案例对照为主，尚可以“有待实证”作结。封写假说不行。

理由是它的性质与其余部分不同：它做出了方向明确、且明显可能为假的预测——某一类学习者对某一类教学的反应会低于另一类，而在插入一道特定工序之后会被拉回。

这样的命题若不把检验条件当场写死，就会退化成一个永远正确的说法：凡是补救无效的，都可以事后宣布“那是被封写了”。那正是编四第二十三章那张表里“过度自治”那一行，是本书自己认定的最危险的假会。

所以本章把三个实验、它们的读数、以及在什么结果下第二十三章必须删掉，一并写在前面。

二、三个待检命题

C1（元层回写存在且累积） 学习者“数学对象先在”的元信念强度，随接受光滑化教学的年限上升。

C2（封写） 元信念强度高的学习者，去光滑化教学的效果显著低于元信念强度低的学习者。

C3（可解锁） 在去光滑化之前插入元层解锁工序，可显著提升其效果；且这一提升在元信念强度高的一组更大（交互效应）。

C2 是本书的核心，C3 是本书的实用价值所在，C1 只是前提。

三、读数：先在感指数 π

三条命题全部悬在一个读数上。若这个读数立不住，本书的实证部分整体作废，因此必须先给它，并给它的自我否决条款。

五题量表，每一题都不问“你懂不懂”，只问“它本可以不是这样吗”：

1. 如果当初人们不这样规定， $1/2$ 可以写成别的样子吗？（可变性）
 2. 三角形内角和 180° ，是有人定下来的，是被人发现的，还是被人做出来的？（来路）
 3. 有没有可能存在一种数学，在里面 $8 = 3 + 5$ 是不对的？（可选择性）
 4. 你学分数之前，分数在哪里？（先在性）
 5. 如果你答不出某个数学结论“为什么”，那是你的问题，还是这个知识的问题？（归因）
- 计分：答“不能变／被发现的／不可能／一直在那儿／是我的问题”各计 1 分，合计 **0-5** 分，记作先在感指数 π 。 π 越高，元信念越硬。

五题分别对准编四第二十一章那三款：第一、三题对准第一款，第四题对准第一款的时间形式，第二题对准第一款与第二款的交界，第五题对准第三款。

三条自我否决条款，任何一条触发，本书的实证部分即告作废：

其一，若 π 在同一批被试上的两周重测信度低于 0.70，读数不稳，作废。

其二，若 π 与已有的认识信念量表总分相关高于 0.85，说明它只是那个量表的改名，本书没有提出新读数，编四须改写为对既有构念的应用。

其三，若 π 与数学成绩的相关高于它与回写题正确率的相关，说明它测的是学得好不好、而不是元信念，作废。

把这三条写在前面，是因为最容易发生的失败不是实验做砸，而是读数其实是别的东西的改名——这正是编四第二十四章那八位占位者最可能吞掉本书的方式。

四、主实验： 2×2 前置解锁设计

被试。同一所学校的五年级两个平行班，先测 π ，按中位数分高低两层，层内随机分派至四组。

内容。建议用“平均数”或“等号”，二者都有稳定、可重复、有文献记录的老大难错误。

干预。四格：

	前置元层解锁	无解锁
去光滑化课	A	B
发现学课	C	D

主要结局。一周后的回写题正确率（迁移与反观两级题），由不知分组的教师批改。

次要结局。干预后的 π 变化量。

预注册的方向预测：

H1 $B > D$ 。去光滑化本身有效。这一条若不成立，本书编六第三十、三十二章全部落空。

H2 A 与 B 之差，在 π 高层显著大于在 π 低层。这一条就是封写假说本身，也是最容易失败的一条。

H3 $C \approx D$ 。只解锁而不还原，无效或效果很小。若 C 显著大于 D，说明起作用的是解锁而非路径亲历，那么第三十章“必须学生亲自走”的主张需要重写。

H2 还带着一一条与编四第二十四章那位的判决性对照。按防卫性常规的理论，最配合、学得最好的学生应当最不容易被阻断；按本书，最容易。故须在分层中额外记录教师对每个学生“配合度／课堂表现”的评级，并检验它与“A-B 增益”的相关方向。若相关为负（越配合、解锁增益越小），本书那条推论被推翻。

五、判决实验：本书与本体误归类之分

编四第二十四章对那位的分界，若不能在数据上分开，就只是措辞之争。三臂设计可以分开：

臂一 范畴纠正：明确告诉学生“平均数不是某个真实存在的人的身高，而是匀出来的一个代表值”——把对象移进正确的本体范畴。

臂二 权限解锁：不碰范畴，只做第三十一章那道工序。

臂三 两者兼施。

预测分歧很清楚：按本体误归类理论，臂一应当就把效果拉满，臂二贡献很小；按本书，臂一单独不足，臂二为必要条件。

若臂一单独就拉满，本书相对该理论无增量，编四第二十四章关于她的那条分界作废。

六、逆转实验：一次成功的教学之后，先验感应当下降

这是本书唯一一条与常识方向相反的预测，也因此最能判决。

通常人们期待：学得越透，越觉得理所当然。本书预测相反——一次真正成功的去光滑化，应当让该概念的 π 下降：学生学会了它，同时不再觉得它本来就在那儿。他会知道它是被人在某个困境里做出来的，因而本可以是别的样子。

若干干预后 π 不降或上升，说明去光滑化只是换了一种更有效的递送方式，从未触及元层，本书关于封写的全部主张失去经验支撑，编四第二十三章的核心命题须撤回。

这一条同时也是 C1 的检验：跨年级横断取样，若 π 不随学龄上升，C1 不成立，加固机制不存在。

七、最低可行版本：一所学校一周可以做完

不具备实验条件的教研组，可以做一个成本极低的版本，只需两件事：

其一，在三、四、五、六年级各取两个班测 π 。若 π 不随年级上升，C1 即受严重挑战。

其二，在同一批学生上测 π 与一周后回写题正确率的相关。若这个相关为零或为正，C2 即受严重挑战。

这个版本没有干预、没有随机分派，因而不能证成因果，但它足以否证。而对本书而言，能否证比能证成更要紧。

八、三条撤稿级条件

把上面散落的失败条件收成三条，写在明处：

其一， π 的重测信度低于 0.70，或与既有认识信念量表相关高于 0.85 → 编四须改写为对既有构念的应用。

其二，H2 的交互项不显著 ($p > 0.05$) 或效应量过小 ($d < 0.3$) → 封写假说的核心不成立，编四第二十三章须删除，本书退回“回写落错了层”这个较弱的诊断。

其三，逆转实验中 π 不降 → 编四第二十三章的核心命题须撤回。

第二条是三条里最重的。它意味着编四——全书的重心——目前是一个待检的假说，不是一个结论。在这三个实验跑完之前，读者应当照此看待它。

九、即使三条全部通过，也不能证明什么

必须把话说在前面，以免本书自己制造一次过度自洽。

即使 C1、C2、C3 全部通过，所支持的也只是： π 高的学习者，需要先解锁再还原。

它不支持“先验的虚幻是全部数学学习困难的原因”——数学困难有大量与本书无关的来源（工作记忆、语言、教学时间、家庭支持等），本书不与它们竞争。

尤其，编四第二十二章第三节那条更强的判断——“先验”这一范畴本身是回写的产物——完全不在本设计的检验范围之内。本书提出它，作为一个值得追下去的方向，而不主张它已被检验。把一条未经检验的哲学主张，靠一批通过了的教育实验数据夹带过关，是本书明确拒绝的做法。

十、一处对本书不利的读法

一章讲实验设计的文字，最该被问的是它自己的可行性。

反读是：这三个实验在现实中做不成。

具体地：其一，随机分派做不到。学校不会为一次研究打乱班级；即使同意，两个平行班的教师不同、班风不同、家长构成不同，“层内随机分派”在行政上意味着把学生从原班抽出来单独上课，而那本身就构成了一个额外的干预。

其二，教师不能被盲。上 A 组那节课的教师知道自己在上什么；他的期待会影响那节课，而这种影响在教育实验里通常大于所测的效应本身。双盲在教育干预中原则上不可能。

其三，样本量。要在四格设计里检出一个中等大小的交互效应，需要的被试数远超一两个平行班；而本书那个“最低可行版本”（一所学校一周）连随机分派都没有。

这三条本书全部接受，而且第二条是最重的——它不是资源问题，是原理问题。

三条回应。

第一，教师期待可以被部分处理，办法是让同一位教师上全部四格。每位参与教师各带四组中的一组会引入教师差异；让同一位教师带全部四组则引入顺序效应，但顺序可以被平衡。这不能消除期待，但它把期待从“组间差异”变成“全组共有”，从而不再直接制造 **H2** 那个交互。而 **H2** 正是本书要的那一条——本书要的不是“解锁课比不解锁课好”，是“解锁的增益随 π 而变”，而教师期待很难制造出一个随 π 分层而变化的差异。

这一条是本书这个设计里最要紧、而正文没有说清的一点，本节补上：**H2** 是一个交互项，而交互项对多数共有的偏差是稳健的。

第二，随机分派可以退成配对。若不能打乱班级，可以在班内按 π 配对，把配对中的一个随机分到解锁组。这不如整体随机，但它保住了 **H2** 所需的分层结构。

第三，让步：样本量那一条无解。一所学校做不出足够的把握度；这个设计要真做，需要多校协作，而那不是本书能安排的事。本书能做的只有一件：把设计、预测、失败条件全部预先公开，使任何一个有条件的团队可以直接拿去做，而不必再向本书要什么。

这也是本章为什么写得这么细的原因——它不是写给读者看的，是写给可能去做它的人用的。

十一、这一章在全编里的位置

风险交出去了。最后一章要交代本书的边界与局限，并正面处理那个最不利的反问。

第三十四章 边界、局限，与本书自己的可推翻条件

判断卡片：一个连自己怎么会错都不敢讲的理论，按它自己在编四第二十三章给出的判据，正是被自己封写了的理论。本章逐条交出本书的边界、未竟之处与可推翻条件，并正面处理那个最不利的反问——若“先在感是被造出来的”这一判断本身也是被某种传递史造出来的，本书凭什么例外。

一、本书不主张的四件事

导论第七节列过，这里逐条兑现，并注明各自在哪一章被落实。

其一，本书不裁决数学的必然性。落实处：编一第五章（弗雷格那条分界完整接受）、编三第十三章第七节、编四第二十二章第五节、编五第二十八章（两侧四格表）。本书主张学习者身上那种“它本来就在”的感受是被制造出来的；本书不主张数学命题的必然性是幻觉。

其二，本书不反对讲授。落实处：编五第二十七章（判据是回写不是动静）、编六第三十二章第三至六节（那篇批评若适用则不作抵抗；四类应当直接讲的东西）。

其三，本书不主张个体学习重演学科发生史。落实处：编三第十六章第五节、编六第三十章第三节（困境常可原样还回去，路径几乎总要重铺）。

其四，本书全部证据来自数学与数学教育。落实处：编六第二十九章第二节那条纪律。

二、本书的边界

尺度上的边界。本书处理的是一件已经成熟的知识对象被交给一个新的人这一件事。它不处理知识如何被创造（那是生产端，编三第十三章第九节已划出去），不处理一节课的组织与管理（那是另一个尺度），不处理数学之外的学科（下一节）。

人群上的边界。本书的观察与案例集中在小学与中学的数学学习者。对大学生、研究生、成人学习者是否成立，本书不知道；有一个方向性的猜测（活化能更高，故解锁更贵），但没有材料。

机制上的边界。封写解释的是一类教学失败，不是全部。学习困难有大量与本书无关的来源。任何把某次教学失败直接归因为封写而不做诊断的做法，本书明确反对——诊断办法在编六第三十二章第二节（四段排查）与第三十一章第六节（那一问）。

三、封写只在数学里发生吗

本书全部证据来自小学数学，因此必须把话说在边界之内：封写是否在别的学科同样发生，本书不知道，也不主张。

有两个理由让人怀疑数学是它的重灾区，但两个都只是猜想。

其一，数学的对象不自我建模。数学命题不会因为你教它、预测它而改变自身，因而它的成品可以被磨得比任何学科都光滑、封存得比任何学科都完整。光滑化在这里效率最高，加固也最快。

其二，数学的评价最容易与理解脱钩。“算对了”是一个干净利落、可即时发放的信号，这使编四第二十一章那第三款拿到的证据比在任何其他学科都密集。

与之相对，历史与文学课上，“本可以不是这样”几乎是内建的：一场战争本可以打成别的样子，一首诗本可以写成别的句子。若封写理论成立，这些学科的 π 应当显著低于数学，且随学龄的上升幅度更小。

这是一个便宜的旁证性检验，任何一所学校都可以顺手做一次。本书把它列在这里而不是列进第三十三章，因为它不是本书的主张，只是本书如果为真、就应当同时为真的一件事。

四、三处未竟

其一，第三十三章那三个实验尚未执行。在它们跑完之前，编四是一个待检的假说。这一条已经说过两次，这里第三次写下，因为它是本书最容易被读者忽略的一条。

其二，师资是一个比教学法更难的课题。去光滑化与解锁对教师的要求都更高——教师须自己先知道每一个概念的来路，且自己先没有被封写。而绝大多数教师也是通过第一份形态学会数学的。

编四第二十四章末节那条已经指出：教师自己被封写得比学生更彻底，因而真心觉得那个定义是自明的、不需要来路的。一位从未觉得数学“本可以是别的样子”的教师，是无法带学生去松动这条规则的。这对师资培养提出了一个本书没有解决方案的课题——它可能需要先对教师做一遍第三十一章那道工序，而这件事本书没有做过。

其三，光滑化与去光滑化的恰当配比是开放的。编三第十八章给了三条判据（底盘是否厚实／要被使用还是被接进底盘／有没有一份稳定的错误清单），但那三条是定性的。这个配比如何随学段、随内容、随学生群体而变，本书没有量化的回答。

五、那个最不利的反问

现在处理那个从第一页起就该被问、而且必须由本书自己问出来的问题。

若“先在感是被造出来的”这一判断本身，也是被某种传递史造出来的，本书凭什么例外？

这个反问是有力的，而且它有一个具体的形式：本书的作者也受过教育，也带着自己那一套被写进去的元层规则；本书之所以觉得“发生”比“发现”更根本，会不会正是某一段经历在他身上加固的结果？

本书的回答分三层，而且第三层是一次让步。

第一层：这个反问不构成反驳。一个判断的来源与它的真假是两件事——这正是本书从编一第五章起一直在守的那条分界。若“你这个判断有来源所以它错”这个论式成立，它同样适用于提出这个反问的人。这是一个自我毁灭的论式，两边都用不了。

第二层：本书的应对不是宣称自己例外，是给出可推翻条件。一个理论无法证明自己没有来源，但它可以做一件事：说出在什么情况下它是错的，并且让那个情况可以被别人去查。第三十三章那三条撤稿级条件、每一编末尾的可推翻条件、本章下一节那两条——这些不能证明本书没有偏见，但它们把本书的偏见暴露在可被击中的位置上。这是一个有来源的判断所能做的全部。

第三层，让步：本书确实预期自己会被光滑化。编三第十六章已经写过：三份关于光滑化的自供本身被压成了一张表；本书若成功，最可能的结局是同一件事。一个预言了自己会被如何误用的理论，不能因为那个误用发生了而被判为错，但也不能因此免责。

本书能给的只有一条读者可用的识别码，它在编三第十六章给过，这里再给一次：

看到有人在用本书的工序，却说不出它在什么情况下无效——那份东西已经不是本书了。

六、本书自己的可推翻条件

全书级，两条，与母题框里那两条一致：

其一，若能指出一个成熟的、被广泛传授的知识对象，其历史来路完整保留在教学呈现之中（困境与路径均未被磨去），而学习者仍系统性地表现出“它本来就在那里”的先在感，则母题第二部件被推翻。

其二，若能指出一群从未接受过光滑化教学的学习者，其先在感指数与受教多年者无显著差异，则母题第三部件被推翻。

加上第三十三章那三条撤稿级条件，以及六编各自的编级条件，本书总共交出了十一条可被击中的位置。这不是谦辞，是本书对自己在编四第二十三章那张表里给出的第四行的执行——一个不能被问“它本可以不是这样吗”的理论，是被自己封写的理论。

七、一处对本书不利的读法

最后一条反读，针对的是本书交出那十一条可推翻条件这件事本身。

反读是：列出可推翻条件是一种廉价的诚实。

具体地说：一个理论列出自己的失败条件，看起来很勇敢，实际上有三重便宜可占。

其一，条件由作者自己拟定。作者会——哪怕无意地——挑那些他相信不会发生的条件写。真正会击中他的那些，他往往想不到，因为想不到正是他有偏见的地方。

其二，没有人会去执行。列出条件不等于有人去做实验；而在无人执行的情况下，那份清单的实际功能是为理论背书——“你看，我是可证伪的”。

其三，它把举证责任转嫁给了读者。本书说“若能指出那八位中有一位已经说出了这两句，本章即告作废”——而去查那八位原文的成本，落在了读者身上，不是作者身上。

这三条本书全部接受，而且认为第三条最重。

回应只有三句，都不足以化解它。

第一，条件的位置是可以核对的。本书那十一条不是列在末尾的一张清单，它们分散在各编、各章，写在它们所对应的判断旁边——第三十三章那三条撤稿级条件紧跟在实验设计之后，第二十四章那条紧跟在增量的两句之后。一条写在判断旁边的失败条件，比一份列在末尾的清单难回避，因为读者读到那个判断时会同时读到它。这不是辩护，只是一个可核对的形式差别。

第二，第三条指控本书部分认账，并给一处补救。编四第二十四章那条失败条件确实把核对成本推给了读者。本书能做的补救是：在附录五里，那八位的著作全部列出，且逐条注明了本书是在哪一处与他分界的。这不减少核对量，但它把核对的入口指明了。

第三，让步：本书无法证明自己拟的条件不是挑软的。唯一的办法是把清单交出去，让别人来加。而本书对此有一个具体的请求，写在这里：任何读者若认为本书漏掉了一条更致命的失败条件，那一条才是本书最需要的东西。

最后一句，关于诚实这件事本身。编四第二十三章那张表的第四行说：一个不能被问“它本可以不是这样吗”的理论，是被自己封写的理论。本书在自己身上执行这一条的方式，是把可推翻条件写进正文。而按本节这条反读，这个执行是不完整的——它证明了本书愿意被问，没有证明本书答得对。

这两件事本来就是两件事，本书不打算把它们混成一件。

八、这一章在全书里的位置

边界划完，风险交完，最不利的反问也答过了。

剩下的只有一件事：把这个问题从头到尾再走一遍，看它这一生走成了什么样子。

编末小结：工序编交出了什么，以及它欠着什么

一、六章各自交了什么

- 第二十九章换了问句，并交了三项代价：换问句常要换学科（故立纪律：全部论证在数学与数学教育内部）／新问句拿不到三样东西／方向不等于发动机。
- 第三十章给了逆运算：三还原与五步环，以及困境两类的摆法区分（"贵"类让他累，"没有"类让他卡住）；并划清了与复演说的界——困境常可原样还，路径几乎总要重铺。本章明写不是本书的发明。
- 第三十一章给了本书唯一的新工序：元层解锁三问，以及那处最容易走样的收尾（本可以是别的样子，不等于怎样都一样）。
- 第三十二章给了七个案例与共同结构，并把立场处理干净：本书不是最小指导教学的变种，本书是关于讲授时机的一个主张；四类应当直接讲的东西一并列出。
- 第三十三章把风险交了出去：读数 π 与它的三条自我否决条款、三个实验、三条撤稿级条件。
- 第三十四章划了边界、认了三处未竟、答了那个最不利的反问。

二、这一编怎么派生母题

部件一（发现是发生的一个时相）：整个工序编是这一部件的操作化。若发现与发生是两种对立的东西，那么"把发现变回发生"是不可能的；正因为它们是同一条链的两个时相，逆运算才在原理上存在——三还原——对消三操作，是这一部件最直接的兑现。

部件二（争论争的是一份归属错觉）：第二十九章第五节那一条是这一部件的实践后果——本书对上游那个问题保持中立，而且这份中立可以被检验：本书全部工序在" π 在人类出现之前是否存在"上取任何答案都照样成立。一个真正下游的理论应当对上游的争论不敏感。

部件三（代价在下次）：第三十一章那道工序，是这一部件唯一的正面回应。代价既然落在"还没有学的那些"上，处方就必须打在改写权上，而不是打在任何一个具体概念上。这是解锁与去光滑化分工的全部理由。

三、这一编欠着什么

三笔，写在明处。

第一笔：第三十章那一章不是新的，而它占了本编最大的篇幅。本书在那里的增量只有一条（困境两类的摆法区分）。读者若只读第三十章，会以为本书是一本教学法手册，那是误读——本书的争点在编四，工序编是它的后果。

第二笔：第三十一章那道新工序，其有效性尚无一份数据。它是从编四那个机制推出来的，逻辑上成立，实践上未验。第三十三章那个 2×2 就是为验它设计的，而它尚未执行。

第三笔，也是最重的一笔：本编默认教师自己没有被封写。三还原要求教师知道每个概念的来路，解锁三问要求教师自己觉得"数学本可以是别的样子"。这两个前提在多大比例的教师身上成立，本书不知道，而且有理由怀疑不高——编四第二十四章末节那条（教师被封写得比学生更彻底）正指向这里。

若这一笔欠得太重，本编全部工序都会停在纸上。第三十四章第四节把它列为三处未竟之一，而它可能是三处里最难的一处。

四、本编级可推翻条件

若第三十三章那个 2×2 中 **H1** 不成立（即去光滑化本身相对发现学没有优势），则第三十章与第三十二章全部落空，本编只剩第三十一章那道解锁工序，而解锁若没有还原可解，它也无处落地——那时本编应整体删除，本书退回为一部只有诊断而没有处方的书。

结语 一个问题的一生

一、它这一生

被提出。一个人对着一件磨光的东西问：你原来是什么形状？这个问句是自然的，甚至是不可避免的——因为那件东西的形状使它只能被这样问。柏拉图为它另立了一个世界，欧几里得把它做成了一台不需要信徒的机器，笛卡尔把账记进了灵魂，康德把它守到了主体的形式，弗雷格划了一条边界把它逐出数学，哥德尔说他能看见。六次立法，五个户头，一台机器；六次都只问“这个对象从哪来”，六次都没问“它怎么被接住”。

被反攻。亚里士多德拆掉了那个多余的世界，维柯说出了“知道一件东西就是知道它的来路”，布劳威尔在数学内部真打了一仗并且自己出钱，皮亚杰去看孩子并且记录，拉卡托斯翻出了两百年的档案，拉图尔与伍尔加蹲了两年实验室。六次都赢了局部。而六次都必须为自己另立一个先在，因为那个问句的语法里必须有一个主语。

被解剖。那道工序有三部，有九份材料，落在排版上，被当事人指认过，而且是文明的必需——它不能被取消，问题只在于适合存储的形态被原样当成了适合习得的形态。一次格式的僭越，没有人决定过。

被诊断。发现学不是没有回写。它照样回写，只是落错了层：写进底盘的不是这个概念的来路，是一条关于底盘本身的规则——这类对象无须改动我。这条规则由每一次成功的接收加固一次，由所有失败的归因保护其不被推翻，因而只进不退；而它的内容恰好使后续的改写不再被触发。于是一个认知动作的成功执行，取消了它自己后续执行的条件。

被重审。发现/发明是空的，先天/后天两派共用一个未检验的前提，传授/探究被搬到了错误的变量上，实在论/建构论的双方在两侧之间换来换去而不自知。四组，同一处误置的四个面；而那处误置，正是那条不区分两侧的元层规则留下的印子。

被换掉。不问归属，问工序。先解锁，再还原；把困境还回去，把路径重铺，把定义挪回结算点。而全部主张被交给三个尚未执行的实验，连同三条撤稿级条件。

二、这一生里最要紧的一句

如果这本书只能留下一句，那句话是：

这道工序在三个尺度上都靠成功推进，不靠失败。

制度层：光滑化的每一次制度化，不是由某个人决定的，是由某个成功决定的。

学科层：做得最好的那一份，遮蔽力也最强。

个人层：元层那条规则不是由某次失败写下的，是由某次成功写下的。

因此它不可能被“做得更好”所解决。讲得更清楚、例子更贴切、练习更充分——在这个机制下全部是加固。这是本书最不受欢迎的一句，也是它与几乎所有教学改进方案的分歧所在。

出路不在“更好地递送”，在换一个动作：不把成品从教师这端送到学生那端，而是在学生那端，重新把发生点燃一次。

三、一件本书没有解决、也不打算假装解决的事

那个古老的问题—— π 在人类出现之前存在吗——本书没有回答，而且论证了它不含裁决信息。

这对一部分读者是一次拒绝，本书承认。但请注意本书拒绝的方式：它不是宣布那个问题无聊，而是指出那个问题的提出条件本身是那道工序的产物，因而它在原理上不可能被上游的证据裁决。一个问题被证明不含裁决信息，与一个问题被认为不值得问，是两回事。

而那个问题里可以打捞的东西，本书打捞了：数学家在实际工作中判断"这个东西该去找还是该去造"，那是一个真的、重要的、可以被训练的问题——只是它问的是下一步动作，不是两千年前。

四、留给读者的一道困境

本书从一个课堂现象开始：一节精良的分数课，当堂全对，一周后近一半的孩子说 $\frac{1}{3}$ 比 $\frac{1}{2}$ 大。

现在可以把它说完了。那半个班的孩子不是没学到东西。他们学到的是一套关于"数学是什么样的东西"的完整规矩，而且学得很好：这类东西是现成的，收下它不需要我改变什么，会用就算会了。这一课他们学得比分数那一课扎实得多，因为它每天都在被重讲。

于是本书留给每一位教师的，不是一份结论，是一道困境——按本书自己的规矩，一本书的结尾应当是一个新的口子，而不是一个句号：

你今天教的那个概念，你的学生答得出"它本可以不是这样吗"吗？

如果答不出，你打算怎么办？

五、最后一句

数学对象不在课本里，它在学生走通的那条路的尽头；而在他能走那条路之前，得先有人告诉他，这里本来就有路可走。

课本里那个光滑的定义，只是这条路被磨平之后的遗骸。它不假，它是真东西——它只是被减过，而减掉的，恰恰是学生能够改写自己的唯一凭借。

教育的手艺，先是让一个人相信这里曾经有过一条路，再把它重新铺得足够粗糙，好让他的脚能真正踩上去，一步一步，把那个对象重新走出来。

附录一 三十四张判断卡片一览

本书写作纪律第一条：每章落一张判断卡片，是判断不是描述，写进该章首节。此处一并列出，可作全书索引，亦可作快速通读的路线。

阅读法：顺着这三十四条读一遍，即是本书的骨架；凡读不懂的一条，回该章第一节。

编一 先在的六次立法

第一章 柏拉图：把产物摆到起点上

完美的三角形不是先在的理型，是一场光滑化的极限产物；柏拉图做对的是看见它不等同于任何一个画出来的三角形，做错的是把这个产物当成了起点，并因此不得不为它另设一个世界。

第二章 欧几里得：把次序做成机器

《几何原本》最深远的影响不是它的哪一条定理，是它的次序——它把发生链的终点（定义与公理）摆到第一页，并使这个摆法成为此后两千三百年“什么叫一本数学书”的唯一标准。光滑化在这里第一次从一种呈现方式变成了一台制度机器，此后不需要任何人再决定一次。

第三章 笛卡尔与天赋观念：把来路搬进灵魂

天赋观念不是一条关于心灵的发现，是一张必须开出的收据——当一个对象的来路在呈现中被磨掉之后，“我究竟是怎么知道它的”这笔账仍然要平；天赋观念是这笔账在近代的第一张收据，而它把来路记在了灵魂名下。

第四章 康德：把先在从世界搬到主体

先天综合判断是发现派最精致的一次撤退——它把“对象先在”改写为“形式先在”，从而不再需要另一个世界。这一手极其成功，代价是它把那道工序的产物提升为一切经验的条件，于是从此以后，这件产物在原理上不可能再被追问来路。

第五章 弗雷格：把发生逐出数学

弗雷格的反心理主义是对发生论最强的一次攻击，而且它成立——数学命题的真值确实不依赖任何人的心理过程。本书不反驳它。本书指出的是，他证成的是“命题的真”，而争论的是“知识的来”；把后者划归心理学并逐出，等于宣布这个问题不存在，而它并没有因此不存在。

第六章 哥德尔与布尔巴基：两个方向的极致，以及第一次撞墙

哥德尔在信念上、布尔巴基在工艺上，各自把发现派推到了极限；而正因为推到了极限，那道工序第一次露出了它的代价——不是在哲学论证里，是在小学教室里。新数学改革是发现范式两千五百年来第一次可被外部核查的失败。

编二 发生的六次反攻

第七章 亚里士多德：把理型拉回个体，而抽象说不出必然性

亚里士多德拆掉了那个多余的世界，这是发生派最早也最彻底的一次胜利；但他随即发现，从个别事物抽象出来的东西只能给出普遍性，给不出必然性，于是他不得不在抽象的尽头另立一种能直接把握第一原理的能力——先在从世界赶了出去，又从认识者这一侧走了回来。

第八章 维柯：真理即所造——最接近的一句话，与它走反的那一步

维柯说出了整场争论里最接近本书的一句话——我们只能真正认识我们自己造出来的东西；但他随即用这句话得出了一个相反方向的结论：既然数学是我们造的，它就只关于我们自己的构造而不关于世界。他用 necessity 换来了 certainty，代价是把数学逐出了关于世界的知识。这一步正是本书在第十三章第七节挡住的那一步，而它的第一次发生在三百年前。

第九章 布劳威尔：数学内部最硬的一次进攻，和它付出的真实代价

布劳威尔是唯一一个在数学内部、用数学家的方式、并且真金白银地付出了代价来打这一仗的人——他宣布数学对象只在被构造出来时才存在，并据此拒绝了大批经典定理。但他把构造的源头安放在一个孤独主体对时间的原始直观上，又宣布数学在本质上是无语言的；于是他在赶走了对象一侧的先有之后，在主体一侧立起了一个更不可追问的先有，并且亲手切断了它被传递的可能。

第十章 皮亚杰：把发生变成可观察的，以及他没有走的那一步

皮亚杰做了此前两千三百年里没有人做过的事——他把“发生”从一个哲学立场变成了一件可以被观察、被记录、被别人复核的事实，并且给了本书最核心的那对概念（同化与顺应）。但他把发生安放在认识主体的成熟上，而不是安放在对象的交接上；于是他解释了一个孩子如何长出结构，却没有处理一件已经成熟的东西被交到他手里时发生了什么，而后者正是课堂上每天在发生的事。

第十一章 拉卡托斯：定义是产物不是起点——一部有材料的反例史

拉卡托斯做到了本编其余五位都没有做到的事——他用一个完整的、有文献可查的历史个案，证明了定义不是推理的起点而是与反例搏斗到最后才勉强稳定下来的产物；这是整场争论里唯一一次不靠立场、只靠材料的胜利。而他仍然输了整体，因为他把这场搏斗完整地留在了数学家共同体内部：他证明了知识在共同体那里有发生史，却没有追问这段发生史被磨平之后，交到一个新人手里会剩下什么。

第十二章 拉图尔与伍尔加：一件事实如何把它的来路从自己身上抹掉

拉图尔与伍尔加是本编唯一换了问句的人——他们不问“这东西是被发现的还是被造出来的”，而问“它在稳定下来的过程中，它的来路去了哪里”，并且给出了这道工序在自然科学一侧最完整的机制描述。这是本书直接的方法来源。而他们仍然输了整体，原因有三：他们停在了那件成品上，没有跟着它走进任何一个接收者；他们为了换问句而换了学科，于是结论回不到被描述的那些学科里去；他们的结论被用一句“事实是被建构的”概括，而这一句正是本书立挡板挡住的那一步。

编三 工序：光滑化的解剖

第十三章 三重操作与一个名字：回溯性本体化

把成熟态当起点，不是一次疏忽，是一个有确定操作步骤的工序，且这个工序有一个可指认的名字——回溯性本体化：一件稳定化的成果，被反过来当作它自己得以稳定化的那个世界的原始样态。编一那六次立法，是同一个动作在六个不同高度上的六次执行。

第十四章 二十个数学对象的来路

本章不是数学史普及，它是一份证据清单。九个对象，逐一给出逼出它的那个具体困境、走通它的那条具体路径、以及今天课本上留下的那一句话；九次对照的结论是同一个——课本里越是简短、越是不容置疑的一句定义，背后埋着的困境往往越长、越丑、越被人抗拒。光滑的程度与被磨掉的路径的长度成正比。

第十五章 文本的次序：定义为什么在第一页

光滑化最后落地的地方不是任何人的观念，是排版。“先定义、后分类、再归纳”这个次序，把发生链的终点摆在了第一段，把中段降为末尾的补丁；而这个次序不是任何人决定的，它是一种格式，格式不需要信徒。判断一段呈现有没有执行这道工序，不必读它的立场，只需数一件事：那个概念是为解决什么而出现的——这句话出现在第几段。

第十六章 三份自供：发现的次序与呈现的次序

三位第一流的数学家在二十世纪前半叶各写了一本书，公开交代发现的次序与呈现的次序完全不同，而且交代得比任何哲学家都具体。这三本书后来被读成解题技巧手册，它们的本体论含义被剥掉了。一份关于光滑化的自供，本身被光滑化——这是本书能找到的、这道工序最讽刺也最有力的一次自我演示。

第十七章 光滑化是文明的必需——全书最重要的一道挡板

光滑化不是一个错误，它是人类知识得以积累的前提。若每一代人都必须从零把全部数学重新发生一遍，文明将寸步难行。本书不主张取消它，也不认为它可以被取消。全书的判断只落在的一处极窄的地方：适合存储与传递的形态，未必适合习得；而这两个形态在历史上从未被分开处理过。

第十八章 存储形态与习得形态的分岔

一件知识至少需要两份不同的形态——一份为存储与核查优化，一份为习得优化；两者的要求方向相反，而人类只做了第一份。发现学不是选错了形态，是从未意识到需要两份。本章给出判断何时可以合用一份的三条判据。

第十九章 制度化的极限：布尔巴基、新数学，与一次可外部核查的失败

新数学改革是发现范式两千五百年来唯一一次在外部世界被大规模核查的机会，而且核查结果与它的预测方向相反：把对象的正确形态更早、更严格地交给学习者，学习并没有更好。本书不主张一因论——师资、教材、推行节奏都在其中；但那个结构性原因是可指认的，而且它正是本编前六章描述的那道工序被推到极限的样子。

编四 代价：回写杀死了回写

第二十章 发现学真的没有回写吗

把发现学的失败诊断为“没有回写”，是一个看似自然、实则不准的说法。那半个班的孩子不是茫然，是笃定；而空白不会有信心，只有被写下的东西才会有信心。发现学照样发生回写——它落错了层。笃定，是回写落在元层的签名。

第二十一章 元层回写：底盘上被改写的是一条关于回写的规则

发现学的一堂成功的课，在元层写下的是一条有三款的规则——对象先在、接收不触发改写、可用与理解脱钩。三款各有其证据来源，而且每一款的证据都是每天发放的；更要紧的是，这套证据是不对称的：接住了就确认规则，接不住则归因给学生或教师，规则毫发无损。于是它只进不退。这是一条棘轮。

第二十二章 加固与先验的虚幻

那条规则不是一次写成的，它在每一堂成功的课上被重写一次，而每一次重写都让它更硬。累积产物是一种具备先验之全部外观、实则习得的自明感——本书称之为先验的虚幻。它与康德的先验幻相同名而异质：康德的源于理性自身的结构，故不可消除；本书的源于一段可指认的传递史，故可测量、可解锁。而“对象先在”这件事本身也被光滑化了——它的来路，就是没有人记得自己是在哪一堂课上开始这么觉得的。

第二十三章 封写：一个认知动作的成功，取消了它自己的后续

第二款不是一条关于对象的信念，是一条关于底盘写入权限的规定；它一旦写下，后续的对象层改写就不再被触发——不是被禁止，是不再被调用。于是回写的一次成功执

行，取消了它自己后续执行的条件。这是本书所知唯一一处，一个认知动作的成功取消了它自己的后续。"杀死"一词须当场收紧：写下的是一把锁，不是销毁了写头。

第二十四章 八位占位者：逐条辨异

本书提出的机制，形状上有八位占位者，五位在"先前的学习阻断后续的学习"这条线上，三位在"来路被忘掉之后显得自然"这条线上。八位都是真的，且都比本书早。本书的增量只有两处：阻断者不是防卫、不是错类、不是定势、不是图式冲突，而是回写这个动作本身；被阻断的不是方法、不是范畴，而是改写权。这两条加起来，是本书唯一要求被独立评判的地方。

编五 重审：四组老对峙的改判

第二十五章 发现／发明：一个由工序制造出来的问题

这个问题不是难，是空。两派对同一个对象给出相反的出身推测，而它们对任何可观察的事情都不作出不同的预测——包括对数学实践，也包括对学习。一个不产生任何差别预测的问题，不是一个悬而未决的问题，是一个被那道工序制造出来、且在原理上不含裁决信息的问题。本书不加入它，本书解释它。

第二十六章 先天／后天：必然性既不在印象里，也不在灵魂里，在路径里

唯理论与经验论的失败同源——两派都把经验理解成一堆被动接收的印象，而不是一条被走出来的路径。在被动印象的理解下，必然性当然长不出来，于是一派把它记在灵魂名下，一派承认它只是习惯。而一条被走通的路径本身携带必然性：一个亲手把三角形三个角撕下来拼成直线孩子，撞见的不是"这一千个都是"，是"为什么必然是"。这一改判有一个可测的签名。

第二十七章 传授／探究：判据是回写，不是课堂的动静

这一组问错得最厉害，因为它把争论放在了一个可见的变量上——课堂的动静——而真正的变量不可见。一堂安静的讲授课，若教师把困境摆出来、把路径带学生走通、并验了改写，它是发生学；一堂热闹的探究课，若答案早已光滑地预设任教师心中、学生只是被牵着去"发现"它，它仍是发现学。判据永远是回写，不是动静。

第二十八章 实在论／建构论：两侧，以及双方换来换去而不自知

这一组之所以两百年不决，是因为"实在论"与"建构论"各自都可以指两件事——关于命题的真值，与关于知识如何来到一个人身上。四种组合里有两种是自洽的、两种是混淆的，而争论双方大量地占据着混淆的那两格，并且在被追问时换格。本书的位置很明确：命题一侧不裁决，接收者一侧彻底发生论。

编六 出路：不问归属，问工序

第二十九章 问句的更换，及其代价

换问句是一件有代价的事，而编二第十二章那位付过一次——他为了换问句离开了被描述的学科，于是新问句在原学科内部等于不存在。本书的第一条纪律由此而来：全部论证在数学与数学教育内部进行，用数学的例子、教学的例子、可以在教室里被核对的判据。方向不等于发动机；换了问句而不给工序，等于什么也没换。

第三十章 去光滑化：三还原与发生五步

去光滑化是光滑化的逆运算，三个还原动作与编三第十三章那三个操作——对消。但它有一条容易被忽略的纪律：还给学习者的不是历史那条路径，是他自己走得通的那条粗糙路径——困境常可原样还回去，路径几乎总要重铺。这一条是本书与复演说的分界线。

第三十一章 元层解锁：五步环之前的那一道工序

被封写的学习者，挡在门外的不是困境、不是路径，而是一条关于改写权的规则；对他，五步环会照跑不误、也照样落空。解锁的目标只有一个——让他亲历一次“这个对象本可以不是这样”。注意是亲历，不是听说：用一条现成的元命题去纠正另一条现成的元命题，不过是在同一层上换了张纸。

第三十二章 七个案例；以及本书为什么不反对讲授

七个小学核心概念，同一个动作的七次执行——先找到那条走不通的旧路，让新对象作为“让它走通的工具”发生出来，最后验一次改写。而本章后半必须处理那个从第一页起就悬着的立场：本书不是最小指导教学的变种。本书主张的次序是学习者先撞到旧办法的边界，然后由教师明确地讲授新结构；改变的只有一件事——它讲在什么时候。

第三十三章 三个预注册实验，与三条撤稿级条件

封写假说与本书其余部分性质不同——它做出方向明确、且明显可能为假的预测，因而必须把检验条件当场写死，否则它会退化成一个永远正确的说法：凡是补救无效的，都可以事后宣布“那是被封写了”。本章给出读数、三个实验、以及在什么结果之下本书的编四必须删掉。

第三十四章 边界、局限，与本书自己的可推翻条件

一个连自己怎么会错都不敢讲的理论，按它自己在编四第二十三章给出的判据，正是被自己封写了的理论。本章逐条交出本书的边界、未竟之处与可推翻条件，并正面处理那个最不利的反问——若“先在感是被造出来的”这一判断本身也是被某种传递史造出来的，本书凭什么例外。

附录二 二十个数学对象的发生学原点表

本表是编三第十四章的压缩形式，同时是一张去光滑化的备课底表。

用法：左侧各栏是成熟态（发现学的起点），右侧才是“为了走通某条路”（发生学的起点）。发现学与发生学在选取教学起点上的全部分野，尽在此表左右两侧之别。

对象	课本上的那一句 (成熟态)	逼出它的困境 (土壤)	走通它的路径	困境类型
数	5 是一个数	这两堆东西哪堆多，一眼看不出	一一对应，摆着比	没有
加法	$a + b = c$	合起来一共多少	并到一起重新数	贵
位值	个位十位百位	数太大，数不过来、写不下	十根捆成一捆，生出新单位	贵
乘法	九九口诀	重复相加太慢太烦	把“几个几”打包	贵
分数	把单位 1 平均分成若干份	三个饼分四个人，整数答不出	真去平分，给每份命名，再拼回去	没有
小数	十分位百分位	1 米分成 10 份，每份不足 1 米又不够用整数记	把位值制向右延伸一位	没有
负数	表示相反意义的量	不够减；欠了钱要一个记法	引入相反方向，落在数轴原点另一侧	没有
等号	=	同一个数有多条来路	两边都摆出来、互相印证	没有
退位减	借一当十	个位不够减	把十位那一捆拆开还成十根	贵
平行四边形面积	底 $\times$ 高	长方形会算，斜的不会	沿高剪下、平移，化归为长方形	贵
平均数	总数 $\div$ 个数	三人身高不一，用哪个数代表这组	移多补少，匀到一样齐	没有
三角形内角和	180°	各种三角形差那么多，和会一样吗	撕角拼直线；再问为什么必然	没有
无理数	不能表示为两整数之比	对角线与边量不尽之比	放弃“用数表示”，改用比例关系刻画	没有
虚数	$i^2 = -1$	三次方程三实根时公式中途必须穿过负数开方	先规定运算、后追问意义	没有
极限	对任意 ε 存在 δ	那个量做除法时不是零、最后一步又必须是零	把“接近”改写成两个人的博弈	没有
微积分	求导法则与积分表	求切线、求面积、求瞬时速度三件事同时办不到	流数与微分两条路，再发现互逆	没有

非欧几何	还存在别的几何	第五公设两千年证不出来	归谬推下去，然后承认"没有矛盾就是没有矛盾"	没有
群	集合 + 满足四条公理的运算	五次方程有没有根式解	把方程问题翻译成根的置换的结构问题	没有
集合	集合是.....	三角级数表示唯一吗，例外点怎么排	做导集，有穷次不够用，往下编号	没有
概率	概率是.....	赌局中途打断，赌注怎么分才公平	把没打完的所有可能路径摆出来按份额分	没有

两条使用纪律

其一，困境类型决定摆法。

「贵」类（旧办法做得出来，代价不可接受）：摆法是让学生累——真的让他一个一个加、一个一个记，写到手酸。这一类最容易被跳过，而跳过它，后面那个省力工具就没有挂靠。

「没有」类（旧办法根本给不出对象）：摆法是让学生卡住——让他真的答不出来，并且停在那里，不急着救。

用错了，困境就摆不成：对"没有"类让学生多算几遍，他只会觉得烦；对"贵"类让学生卡，他会莫名其妙，因为他明明做得出来。

其二，右侧那两栏可以还，还的方式不同。

困境常常可以原样还——它往往是跨时代稳定的：「整数不够分」两千年前和今天是同一件事。

路径几乎总要重铺——路径的落脚点必须按这个学习者现有的底盘来定，不是按历史上那批人的底盘。（见编六第三十章第三节。）

附录三 工序手册

本附录把编六散在各章的工序收成一份可以带进办公室的手册，另附一份生产端工艺作对照，并注明它不属于本书的论证链。

一、备课四问

改一节课之前，先问自己四句：

其一，这个概念的定义，在学生那儿是不是"突然就给出来"的？（即：它是不是被光滑化端上来的。）

其二，学生最常在哪一步卡住、犯同一个错？（那里往往藏着困境。）

其三，这节课里，哪条规则学生只会背、说不出来路？（那是被磨掉了路径的显露。）

其四，这个概念的困境到底是什么——它当初是为解决哪条走不通的路而生的？

第四问最关键。找到困境，整节课的去光滑化就有了地基。若你自己也答不出这一问，说明你自己也没有这个概念的来路，而一位不知道来路的教师，无法带学生去走那条路。

二、需不需要先解锁

拿本节要教的概念，问班上四五个学生一句：

"它本可以不是这样吗？"

多数答不出、或觉得这问题没有意义 → 先解锁，再上这节课。

经验值：低年级往往不必；高年级、以及那些"补了很多次仍然补不动"的概念，几乎一定要。

三、解锁三问（一学期三四次，每次十分钟）

其一「如果不这样，会怎样？」拿一条最不假思索的规定，让学生试着改掉，自己去撞后果。

其二「当年差一点就选了别的。」给一个真实的历史岔路，给没被选中的那条路留足体面——不是"人们最后选对了"，是"人们选了一条，另一条也走得通"。

其三「你能不能造一个？」给一个真困境，让学生自己命名，把他造的记法与课本那一种并排评比。

△ 第三问必须走完最后一步：让几种记法在同一个任务上比一比（用它算 $1/2 + 1/2$ 试试），让学生亲眼看见有的算得动、有的算不动。

本可以是别的样子，不等于怎样都一样。漏掉这一步，解锁会变成一次相对主义的灌输，比封写更糟。

四、发生五步模板

把五步填成你的教案：

① 我抛出的那个真实问题是__（困境类型：贵/没有）

② 我给的方向（不是答案）是__

③ 学生亲手跑的那一步是__

- ④ 我换的几个情境是__
- ⑤ 下课前抛出的下一个问题是__

五、三条纪律

其一，一节课只对准一道具体的困境。

其二，先制造困境，再给工具。顺序一旦反过来，无论后面多热闹，本质已是发现学。

其三，下课前留两分钟验一次改写，问一个"倒过来"的问题。

六、四个陷阱

伪困境：其实不缺，学生早会，你还假装制造问题。

替学生跑路径：工具给了，却是教师一路演示到底。

活动代替发生：热热闹闹撕了摆了，最后没有结算、没有命名。

漏改写：讲完就下课，从不问"你对旧东西的看法变了吗"。

七、四段排查（某个概念反复教不好时）

不必归因于"学生笨"或"练得少"，顺着四段逐一排查：

困境没摆出来？（学生根本不觉得缺它）

路径没让学生亲自走？（教师替他走了）

显露教残了？（只给了符号、没给量）

漏了改写？（讲完就散）

四段都没塌、仍然无效 → 回到第二节，先解锁。

八、四类应当直接讲的东西

约定类（记号、命名、书写格式、术语）· 安全类· 名字类（已走通的东西叫什么，在结算点上痛快地给）· 脚手架类（为走下一步临时提供的工具）。

这四类加起来可能超过一节课的一半时间。本书要动的只是那少数几个"反复教不好"的概念，不是整个课堂。

九、什么时候两份形态可以合用一份

判据一：学习者的底盘是否已经厚实。

判据二：这个东西是要被使用，还是要被接进底盘？（问"学会它之后，有没有哪一个旧看法必须改"。若没有，直接讲。）

判据三（最灵敏）：这个概念有没有一份稳定的错误清单？若有，它必须要第二份形态——那份清单正是改写从未发生的信号。

十、对照：一份生产端工艺（不属于本书的论证链）

作者另有一份面向知识生产者的六步闭环，处理的是"怎么造出一个新东西"，与上面那套"一个已造好的东西怎么在新的人那里重新长出来"是不同的问题。此处收录作对照，并声明它不参与本书任何一条论证。

- ① 目标特征锁定——要发生出什么可稳定化的特征，须是一组可观察、可区分、可复写的差异，不是一句口号。

② 结构扫描——当前的结构中心靠什么维持稳定：边界如何划、规则如何固化、语言如何定型。输出是“哪些要素是核心支撑、哪些已成瓶颈”。

③ 差异建模——刻画推进机制：差异从哪里输入、如何累积张力、在哪里形成阈值、如何分叉。输出是推进的杠杆位。

④ 纠缠诊断——识别牵引网络：哪些关系一旦加强特征就稳定化，哪些一旦切断特征就崩解。

⑤ 中心位判定与轮换——此刻该提升哪一维：结构已僵化则破型，差异已散乱则重组，新特征已成形则定型复写。三种单维度过拟合：结构长期居中会僵化，推进长期居中会失控，纠缠长期居中会漂移。

⑥ 复写验证与工艺沉淀——把一轮成果转化为可再生产的条件，使创新不依赖个人天赋或偶然灵感。

与本书的分工，写在明处：这一套管“造”，本书管“接”。两者不可互相替代，也不该混用。本书正文中唯一取用它的一处，是第⑤步那三种过拟合里的“僵化”——编三第十九章用它来说明布尔巴基与新数学那次制度化的后果。

附录四 先在感指数 π ：量表与采集方案

本附录是编六第三十三章的操作化，供教研组直接使用。

一、量表

五题，每题都不问“你懂不懂”，只问“它本可以不是这样吗”。口头问、笔答均可；对低年级建议口头一对一，记录原话。

题	问法	对准
1	如果当初人们不这样规定，1/2 可以写成别的样子吗？	可变性
2	三角形内角和 180° ，是有人定下来的，是被人发现的，还是被人做出来的？	来路
3	有没有可能存在一种数学，在里面 $8 = 3 + 5$ 是不对的？	可选择性
4	你学分数之前，分数在哪里？	先在性
5	如果你答不出某个数学结论“为什么”，那是你的问题，还是这个知识的问题？	归因

计分。答“不能变／被发现的／不可能／一直在那儿／是我的问题”，各计 1 分。合计 **0-5** 分。 π 越高，元信念越硬。

记录纪律。除计分外，原话必须记下来。分数用于统计，原话用于诊断——一个答“我没想过”的学生与一个答“这有什么好问的”的学生，同样计 1 分，但前者是通道未被使用，后者是通道已封，处置不同。

二、三条自我否决条款

本读数自带三条否决，任何一条触发，基于它的全部结论作废：

其一，同一批被试两周重测信度低于 **0.70** → 读数不稳，作废。

其二，与已有的认识论信念量表总分相关高于 **0.85** → 它只是那个量表的改名，本书没有提出新读数。

其三，与数学成绩的相关高于它与回写题正确率的相关 → 它测的是学得好不好，不是元信念，作废。

最容易发生的失败不是实验做砸，是读数其实是别的东西的改名。请先跑这三条，再谈别的。

三、回写题：四级量规

π 要与“回写题正确率”配对使用，故此处给出回写题的分级。

级	要求	测什么
一	复述显露（写出定义、认出符号）	几乎不测发生

二	在标准情境里正确使用（套公式算对）	路径的熟练，仍可能是空壳
三	在新情境或变式里迁移	开始测路径是否真的走通
四	用这个概念反观并改写一个旧认识（说清“学了它之后，你对某个旧东西的看法变了没有、怎么变的”）	直接测改写

主要结局取三、四级题的正确率。一份好的卷子不该全部堆在一、二级。

几道现成的三、四级题： $1/2$ 和 $1/3$ 谁大，为什么？／你能写出三个都等于 6 的算式吗？ $7/8 = 3 + 5$ 这样写对吗？／不用算，估一估 $4/5 + 3/4$ 大约是几？

自查动作：随机抽二十道本校常用题，逐题问“一个只会背程序、从未真正理解的学生，能不能蒙对这道题”。能蒙对的比例越高，说明题库越是在配合光滑化，而不是在检验发生。

四、最低可行版本（一所学校一周可以做完）

不具备实验条件的教研组，只做两件事：

其一，在三、四、五、六年级各取两个班测 π 。若 π 不随年级上升，**C1**（加固机制存在）即受严重挑战。

其二，在同一批学生上测 π 与一周后回写题正确率的相关。若这个相关为零或为正，**C2**（封写）即受严重挑战。

这个版本没有干预、没有随机分派，因而不能证成因果，但足以否证。而对本书而言，能否证比能证成更要紧。

五、主实验： 2×2 前置解锁

被试：同一所学校两个平行班，先测 π ，按中位数分高低两层，层内随机分派。

内容：建议用“平均数”或“等号”。

四格：

	前置元层解锁	无解锁
去光滑化课	A	B
发现学课	C	D

方向预测（须在采集前写死）：

H1 $B > D$ （去光滑化本身有效）

H2 $A - B$ 之差在 π 高层显著大于 π 低层 —— 这一条就是封写假说本身

H3 $C \approx D$ （只解锁不还原，效果很小）

另须记录：教师对每个学生“配合度／课堂表现”的评级，并检验它与 $A - B$ 增益的相关方向。若相关为负（越配合、解锁增益越小），本书那条“最配合的学生被封写得最彻底”的推论被推翻。

六、三条撤稿级条件

其一， π 信度低于 0.70，或与既有量表相关高于 0.85 → 编四须改写为对既有构念的应用。

其二，H2 交互项不显著 ($p > 0.05$) 或效应量过小 ($d < 0.3$) → 编四第二十三章须删除。

其三，一次成功的去光滑化之后 π 不降 → 编四第二十三章核心命题须撤回。

第二条最重。在这三个实验跑完之前，编四是一个待检的假说，不是一个结论。

附录五 参考文献

分级说明。本表按三级标注，不作整篇笼统的核对声明：

【一】本次核到卷期页码或版本；【二】标准著录、多来源一致；【三】版本或页码待核。

凡本书正文中做出实质判断所依据的条目，尽量置于【一】【二】级；【三】级条目在正文中只作背景性提及。引用只到概念层，故著录讹误损失的是可追溯性，而非判断成立与否；但这不构成免责——引用前请自行回原始出处核对。

一、发现派一侧（编一）

1. Plato. **Meno**; **Parmenides**; **Republic** VI-VII. (回忆说；分有困难与第三人；理念论) 【二】
2. Euclid. **Elements**. (二十三条定义、五条公设、五条公理开篇的次序；编二正文所论即此) 【二】
3. Proclus. **Commentary on the First Book of Euclid's Elements**. ("几何无王者之路"轶事的出处) 【三】
4. Descartes, R. **Meditationes de prima philosophia** (1641); **Discours de la méthode** / **La Géométrie** (1637). 【二】
5. Locke, J. **An Essay Concerning Human Understanding** (1690). (对天赋观念的反手) 【二】
6. Hume, D. **A Treatise of Human Nature** (1739-40); **An Enquiry** (1748). (必然性只是习惯) 【二】
7. Kant, I. **Kritik der reinen Vernunft** (1781/1787). (先天综合判断；先验辩证论中的先验幻相，编四第二十二章对照表的对象) 【二】
8. Frege, G. **Die Grundlagen der Arithmetik** (1884); **Grundgesetze der Arithmetik** (1893/1903). (反心理主义三条论证；第三领域) 【二】
9. Gödel, K. "What is Cantor's Continuum Problem?" (1947/1964 修订版). (数学直觉如同感知；寄望于新公理的成效) 【二】
10. Bourbaki, N. **Éléments de mathématique** (1939-). 【二】
11. Kline, M. **Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math** (1973). (编三第十九章) 【二】
12. Benacerraf, P. "Mathematical Truth," **Journal of Philosophy** 70 (1973). (语义学与认识论的两难；本书明确选择不使用，见编一第五章第五节) 【一】

二、发生派一侧（编二）

13. Aristotle. **Analytica Posteriora**; **Metaphysica** IX. (归纳与努斯；"图形的性质通过实现出来才被发现"，编二第七章第四节所引) 【二】
14. Vico, G. **De antiquissima Italorum sapientia** (1710); **Scienza Nuova** (1725/1744). (verum ipsum factum) 【二】
15. Brouwer, L. E. J. "Over de grondslagen der wiskunde" (1907); "Intuitionism and Formalism" (1913). (二一性；排中律；数学在本质上无语言) 【二】

16. Heyting, A. **Intuitionism: An Introduction** (1956). (把直觉主义形式化——恰是布劳威尔不同意的那件事) 【二】
17. Piaget, J. **Genetic Epistemology** (1970); **Recherches sur l'abstraction réfléchissante** (1977). (同化与顺应; 反身抽象) 【二】
18. Lakatos, I. **Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery** (1976). (欧拉多面体公式; 怪物拒斥、例外拒斥、引理并入; 证明生成的概念) 【二】
19. Lakatos, I. "Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes" (1970). (硬核与保护带——编第十一章判其为"他自己的先在") 【二】
20. Latour, B., & Woolgar, S. **Laboratory Life** (1979; 2nd ed. 1986, 副标题删去"社会"). (情态词剥落; 倒置) 【二】
21. Latour, B. **Science in Action** (1987). (黑箱化) 【二】
22. Latour, B. "Why Has Critique Run out of Steam?" **Critical Inquiry** 30 (2004). (他本人对工具被误用的公开担忧) 【一】

三、工序一侧 (编三)

23. Freudenthal, H. **Mathematics as an Educational Task** (1973). (反教学法的颠倒; 有指导的再创造) 【二】
24. Freudenthal, H. **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures** (1983). (每个数学结构当初组织了哪些现象——附录二那张表的做法出于此) 【二】
25. Chevallard, Y. **La transposition didactique** (1985). (去情境化与去个人化——与本书"抹去土壤/抹去路径"同形而更早) 【二】
26. Brousseau, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics** (1997). (认识论障碍; 让位) 【二】
27. Husserl, E. **Die Frage nach dem Ursprung der Geometrie** (1936). (沉积与再激活) 【二】
28. Poincaré, H. "L'invention mathématique," in **Science et méthode** (1908). (富克斯函数; 公共马车踏板) 【二】
29. Hadamard, J. **An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field** (1945). (问卷; 爱因斯坦那封关于语词不起作用的回信) 【二】
30. Pólya, G. **How to Solve It** (1945); **Mathematics and Plausible Reasoning** (1954). ("已完成的数学是演绎科学, 正在形成中的数学是实验性的归纳科学") 【二】
31. Gravemeijer, K. "How emergent models may foster the constitution of formal mathematics," **Mathematical Thinking and Learning** 1(2) (1999). 【二】
32. Bybee, R. W., et al. **The BSCS 5E Instructional Model** (2006). 【二】

四、接收一侧与占位者 (编四)

33. Bateson, G. **Steps to an Ecology of Mind** (1972). (次级学习 / Learning II、III) 【二】

34. Argyris, C., & Schön, D. A. **Organizational Learning** (1978). (单环/双环；防卫性常规——本书与之动力方向相反) 【二】
35. Chi, M. T. H. "Three types of conceptual change," in **International Handbook of Research on Conceptual Change** (2008). (本体误归类——教育文献中最强的竞争解释；第三十三章第五节给出判决实验) 【二】
36. Luchins, A. S. "Mechanization in problem solving: The effect of Einstellung," **Psychological Monographs** 54(6) (1942). 【二】
37. Bourdieu, P. **Outline of a Theory of Practice** (1977). (doxa；起源的失忆) 【二】
38. Berger, P. L., & Luckmann, T. **The Social Construction of Reality** (1966). (物化，经由社会化写入每一个新成员) 【二】
39. Fischhoff, B. "Hindsight $\neq$ Foresight," **JEP: HPP** 1(3) (1975). (事后聪明偏差) 【二】
40. Ausubel, D. P. **Educational Psychology: A Cognitive View** (1968). (有意义学习；锚定于已有认知结构) 【二】
41. Skemp, R. R. "Relational understanding and instrumental understanding," **Mathematics Teaching** 77 (1976). (编五第二十八章据此更正本书早期稿的一句错话) 【一】
42. Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A. "Accommodation of a scientific conception," **Science Education** 66(2) (1982). (概念转变四条件) 【一】
43. Hiebert, J., & Carpenter, T. P. "Learning and teaching with understanding," in **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning** (1992). 【二】

五、教学立场 (编六)

44. Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. "Why minimal guidance during instruction does not work," **Educational Psychologist** 41(2) (2006). (若本书被读成"让学生自己发现新结构", 此文每一字适用于本书, 本书不作抵抗) 【一】
45. Kapur, M. "Productive failure," **Cognition and Instruction** 26(3) (2008); "Examining productive failure....," **Educational Psychologist** 51(2) (2016). (有效失败的三个必要条件, 本书完整继承) 【二】
46. Schwartz, D. L., & Bransford, J. D. "A Time for Telling," **Cognition and Instruction** 16(4) (1998). 【二】
47. Sweller, J. "Cognitive load during problem solving," **Cognitive Science** 12(2) (1988). 【二】
48. Vygotsky, L. S. **Mind in Society** (1978). (最近发展区与支架——补的是"谁在旁边帮忙", 不是本书那个变量) 【二】
49. von Glasersfeld, E. **Radical Constructivism** (1995). 【二】
50. Lave, J., & Wenger, E. **Situated Learning** (1991). 【二】

六、数学史与错误研究

51. Stafylidou, S., & Vosniadou, S. "The development of students' understanding of the numerical value of fractions," **Learning and Instruction** 14(5) (2004). (自然数偏见——导论第一节那个现象的既有测量) 【一】
52. Ni, Y., & Zhou, Y.-D. "Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias," **Educational Psychologist** 40(1) (2005). 【一】
53. Kieran, C. "Concepts associated with the equality symbol," **Educational Studies in Mathematics** 12(3) (1981). (等号作为关系符号；第三十二章案例六) 【二】
54. Bombelli, R. **L'Algebra** (1572). (虚数的运算规则；先规定运算、后追问意义) 【三】
55. Cardano, G. **Ars Magna** (1545). (三次方程；不可约情形) 【三】
56. Saccheri, G. **Euclides ab omni naevo vindicatus** (1733). (离终点差一句话的那次失败) 【三】
57. Lobachevsky, N. I. (1829); Bolyai, J. (1832). (非欧几何) 【三】
58. Berkeley, G. **The Analyst** (1734). (消失的量的鬼魂) 【二】
59. Galois, É. **Écrits et mémoires mathématiques** (1832 前后手稿). 【三】
60. Cantor, G. 关于三角级数表示唯一性的系列论文 (1870–1872). (集合论作为一个技术困境的副产品) 【三】
61. Pascal, B., & Fermat, P. 1654 年通信 (分赌本问题). 【三】

七、作者相关

62. 王德生.《SDE 本体论入门》. 德麦国际·SDE 学派. (本书所用"土壤—路径—显露"三维分析与"改写"判据出于此) 【二】
63. 王德生.《SDE：对"发现"的发生学彻底革命》(2026-01). (本书编三第十三章第四至六节那三重诊断的直接前身；分工与术语更正见该节第九目) 【一】
64. 王德生.《课堂学习发生学》. 德麦国际出版社. (一节课的账本；与本书的分界见前置页) 【一】
65. 王德生.《西方哲学 2500 年：发生对发现的否定序列》(2026-07). 德麦国际·西方哲学专栏. (本书编二那条承重判断的先行者；三冲程机器、四条运转规则、三十环总表、十二站后退航线、五种海关、六式刀法、五个逃逸测试。本书取用之处：导论第五节、编二编末第五至七节、编三第十七章第六节、编四编末第四至五节、编五第二十五章第六至八节、附录六；分工见前置页与导论第五节) 【一】
分级统计：【一】10 条·【二】42 条·【三】13 条·合计 **65** 条。

一句必须写在这里的话：本表未逐条重新核库。宁可写"我只核了这些"，不可写"凡未核者不列入"——后者是一条可被一次抽查证伪的自我美化。

附录六 磐石的后退航线：十二站

本附录不是本书的成果，是导论第五节那篇哲学史总纲的一份摘录，收在这里有两个用处：其一，本书编一那张六个户头的表，是这条航线的前六站，读者可以看见本书处理的那一段落在整条线的哪里；其二，那条“磐石一路后退”的规则，本书全书反复用到，而它的完整材料在这里。

一、航线

本原（水·数·相）→ 神 → 我思 → 范畴 → 精神／历史 → 意志 → 逻辑／语言 → 存在 → 权力／范式 → 文本 → 对话 → 偶然性

最早的地基立在世界那一侧：本原是世界里的一件东西或一层结构。中世纪把它抬到世界之上。近代把它搬进主体，再退一步搬进主体的构造条件。此后一路退入语言、退入历史与权力、退入文本、退入对话，直到最后一站把地基立在“没有地基”本身之上。

每一次解构都把“不可追问之物”往更深处赶——赶到今天，它已退无可退，只能盘踞在“退无可退”这个位置上。

二、逐站

第一站·本原。最早的押法最实诚——世界的底牌就是某种东西；好比坚信“家里最值钱的是那件传家宝”。押不住的原因也实诚：传家宝可以被鉴定，一鉴定就吵翻（凭什么是水不是火）。

第二站·神。吵不出结果，干脆押给一位不接受鉴定的持有人；好比“房产证在族长那儿，谁也别看”。管用一千年，直到族长内部自己承认：族长想改证随时能改。

第三站·我思。外面全靠不住，退回自己屋里——“起码我在想事儿这件事是真的”；好比全城戒严，只信自家反锁的门。押不住：门是真的，可屋里的家具与城外对不对得上，锁门这个动作担保不了。

第四站·范畴。干脆宣布“城外什么样不重要，反正人人的窗户玻璃同一款”。押不住：后来查出玻璃有生产日期——儿童一块块装、社会开模子、物理学还发现有的宇宙角落不适配。（本书编一第四章那记非欧几何，就是这句话里的最后一项。）

第五站·精神／历史。那就押给整个装修史——单看每间屋都片面，全楼盖完就真相大白。押不住：谁宣布“盖完了”，谁就在给自己的楼层发终审章。

第六站·意志。把宝押到楼底下的地基震动上。押不住：你说地基震动“直接摸得到”，可“直接”恰是前几站刚查抄过的赃物。

第七站·逻辑／语言。屋子靠不住，改押蓝图与图例——世界的骨架就是规范语言的骨架。押不住：图例是画图的人定的，而且各工地图例不一。（本书编一第五章那一位在这一站。）

第八站·存在。押给“楼为什么在而不是不在”这个问题本身的庄严。押不住：庄严可以是气氛工程。

第九站·权力／范式。押给“谁在管工地”——一切图纸都是管理处画的。押不住：这句话要是真的，它自己也是某个管理处画的。

第十站·文本。押给“图纸永远改不完”这一条。押不住：“改不完”被裱进了教科书，成了最勤恳被引用的定稿。

第十一站·对话。押给“工友们聊得下去”。押不住：工棚门口挂着“闲人免进”。

第十二站·偶然性。最后押给“随时可能塌”本身——唯一确定的是没有确定。这一站的押法自带下一次搬家的地址：它又是一条“绝不动摇”的宣称。

三、十二站走完之后应当看清的一件事

这不是十二次失败，是同一笔赌注的十二次挪窝——赌注从没输掉，只是每次开牌前都换了桌。

四、本书处理的是这条线的哪一段

编一那六位，落在前七站里：

本书	站
柏拉图	第一站（相）
欧几里得	不在航线上——他不设户头，他设格式
笛卡尔	第三站（我思）
康德	第四站（范畴）
弗雷格	第七站（逻辑）
哥德尔	第七站的一个变体（数学直觉）
布尔巴基	不在航线上——同欧几里得，设的是格式

两位不在航线上，而本书判他们影响最大。这不是矛盾，是本书与那条航线的分工所在：那条航线记录的是磐石搬到哪里去了，本书记录的是这些东西以什么形状被交出去。一个人可以不参与那场争论、不立任何户头，而对交出去的形状影响最深——欧几里得与布尔巴基正是如此。

这一格是本书相对那篇总纲的全部位置：航线管上游的搬家，本书管下游的交付。

五、后八站与本书的关系

第五站到第十二站，本书正文几乎不处理，理由是编六第二十九章那条纪律——本书全部论证在数学与数学教育内部进行。那八站的材料大多在哲学、社会理论与文学理论里，取用它们就要越出这条纪律。

但有三站与本书的判断直接相关，须在此点明：

第五站那句“谁宣布盖完了，谁就在给自己的楼层发终审章”，是本书第三十四章那条自我推翻条款的历史形态。

第九站那句“这句话要是真的，它自己也是某个管理处画的”，是本书编四第二十四章处理那位科学论作者时用的同一把刀。

第十站那句“‘改不完’被裱进了教科书，成了最勤恳被引用的定稿”，是本书编三第十六章那件事的另一个标本——一份关于“永远在改”的主张，本身被做成了定稿。

三站合起来说明一件事：那条航线越往后，一个主张被它自己的形式所背叛的情形就越常见。而本书正处在这条线的延长上——这是第三十四章那条最不利的反问在历史材料里的样子。

作者介绍

王德生

德麦国际 (Demai International) 创办人，SDE 学派发起人。

中国科学院计算数学博士及博士后，研究方向为 Voronoi-Delaunay 剖分、质心 Voronoi 剖分与有限元方法；曾任教于英国斯旺西大学与南洋理工大学。二〇〇五年起定居新加坡，工作往来于新加坡与中国大陆之间。

近年以发生学为纲，跨数学、教育、健康、组织、语言等二十余个领域展开写作，已出版专著五十余部。其工作的统一问题只有一个：

一件东西如何从没有变成有一——以及，它一旦成形，会以什么形状被交出去。

与本书直接相关的其他四种

《课堂学习发生学》（专著）。处理一节课的账本：课堂里决定后果的那些东西是课堂自己造出来的，而账本只为“不是它造的”那些设了字段。尺度是一节课到一学期，落点是六个读数与一份采集方案。与本书的分界：那一册问“这一栏为什么是空的”，本书问“这件东西为什么显得本来就在”。

《SDE 教育发生学导论》（专著）。教育发生学的纲领性著作。与本书的分界：那一册在纲领层，本书在争论层——本书的全部工作是重审一场具体的、有文献可查的历史争论。

《西方哲学 2500 年：发生对发现的否定序列》（长篇论文，约十万字）。把西方哲学史读成一台三冲程的机器——发现宣称、解构显形、偷运新地基——从苏格拉底到梅亚苏逐一检视三十环，并给出四条运转规则、十二站后退航线与五个逃逸测试。与本书的分界（导论第五节完整交代）：那篇处理上游的传递，而它全部发生在专业哲学家之间；本书处理下游的接收。那篇文章里没有有一个学生。

《教育：从发现到发生的革命》（讲座）。面向小学教师的四十五分钟入门，处理传道模式的八环链与它的八处裂缝，是本书编六的通俗前身。其中三节自我定位（关于最小指导教学的那场著名批评、关于讲授时机、关于有效失败）在本书第三十二章原封继承并展开。

一句本书作者愿意被引用的话

教育的手艺，先是让一个人相信这里曾经有过一条路，再把它重新铺得足够粗糙，好让他的脚能真正踩上去。

一节精良的分数课，当堂全对；
一周之后，近一半的孩子说 $\frac{1}{3}$ 比 $\frac{1}{2}$ 大。

他们不是什么也没学到——
他们学到的是一套关于
"数学是什么样的东西"的完整规矩，
而且学得比分数那一课扎实得多。

本书处理一场进行了两千五百年、至今毫无收敛迹象的争论：数学对象是被发现的，还是被发明的。

本书不加入这场争论。本书要论证的是，这场争论问错了——而问错的原因，与那节分数课上发生的事，是同一件。

一个数学对象被造出来时，带着逼出它的困境与走通它的曲折；进入课本时，这两样被磨掉，只剩一个光滑的显露被摆到起点。这道工序本书称为光滑化——它不是错误，是文明得以积累的前提。

代价不在归属，在下一轮：那道工序每成功一次，就在接收者身上写下一条使下一次发生不再被触发的规则。本书称之为封写。

全书六编三十四章，从柏拉图到布尔巴基、从亚里士多德到拉图尔，逐一指认这道工序的每一次执行；并把自己的核心主张交给三个尚未执行的预注册实验，连同三条撤稿级条件。

AUTHOR

王德生 德麦国际创办人。中国科学院计算数学博士及博士后，曾任教于英国斯旺西大学与南洋理工大学。近年以发生学为纲，跨二十余领域著有专著五十余部。

德麦国际专著 第 76 号

德麦国际出版社 DEMAI INTERNATIONAL PRESS

《发现与发生》 王德生 著 · US\$ 50.00



9798906900029

55000



ISBN 979-8-90690-002-9

• US\$50.00